

Matematyka antorwdo

Michał SZUREK, Warszawa

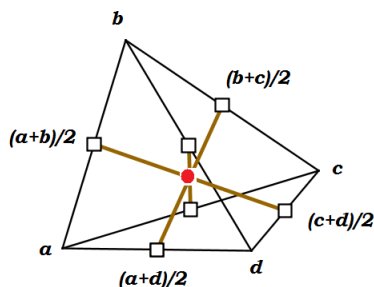
Kto z Czytelników nie rozumie drugiego słowa tytułu, niech przeczyta je od końca. Wymyśliłem ten termin jako analogię do podobno istniejącej „inżynierii odwrotnej”: mamy maszynę, a zadaniem naszym jest odkryć, do czego ona służy. Wyobrażam sobie, że może mieć to znaczenie przy szpiegostwie przemysłowym.

Od pokoleń matematykę przekazujemy za pomocą zadań. Masz zadanie, rozwiąż je. Dobry matematyk musi umieć rozwiązywać zadania – bez tego nie tylko nie zostanie dobrym matematykiem, ale w ogóle nie skończy studiów. Co do tego, czy zda maturę, zdania są podzielone. Na wszelkiego rodzaju konkursach sprawdzana jest przede wszystkim ta umiejętność. I trudno sobie wyobrazić, że może być inaczej.

Dawno temu Wacław Sierpiński (1882–1969) napisał, że w teorii liczb ważniejsze jest stawianie pytań, niż udzielanie na nie odpowiedzi. Wziąłem to zdanie na serio, rozszerzyłem na inne działy matematyki i stąd wyszła mi owa matematyka odwrotna. Opiszę jedne z zajęć (lekcji szkolnych i wykładów uniwersyteckich), jakie sobie opracowałem.

Niezależnie od poziomu, na jakim jestem (gimnazjum czy studia doktoranckie), zaczynam od pokazania, że środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok. Na ogół właśnie tylko „pokazuję”, a nie „wykazuję”. Stawiam następnie pytanie: proszę ułożyć zadanie związane z tym tematem. Cokolwiek, byle wiązało się z tematem „środki boków czworokąta”. Na ogół zapada cisza i po pewnej chwili ktoś proponuje „obliczyć pole równoległoboku środków”. Zgadzam się, ale proszę o trudniejsze i ciekawsze. „No, to obwód”, proponuje ktoś następny. Znów krzywię się, ale nieco mniej. Podprowadzam słuchaczy jak umiem, żeby zadali pytanie o twierdzenie odwrotne: czy do każdego równoległoboku można dobudować czworokąt tak, by ów równoległobok był jego równoległobokiem środków. Tu wprowadzam geometrię analityczną. Jeżeli a, b, c, d są wierzchołkami czworokąta, to środkami boków są średnie arytmetyczne $(a+b)/2$ itd. Stąd „wszystko” się da wyliczyć. Zapominam więc o geometrii i dyskutujemy problemy algebraiczne. Próbuje nakłonić słuchaczy do tego, by to oni sami podali propozycje zadań. Na ogół udaje mi się „wywołać” zadanie, czy ze średnich (niekoniecznie arytmetycznych) da się „odtworzyć dane liczby”. Wracam do geometrii. Zamiast czworokąta biorę trójkąt, łączę jego środki boków i dziwię się publicznie, że jest „inaczej” niż dla czworokąta.

Wracam do czworokąta. Dorysowuję mu przekątne i zwracam uwagę na to, że na rysunek ten mogę patrzeć także jak na czworościan. Zwracam uwagę, że środki odcinków o końcach $(a+b)/2, (c+d)/2$, następnie $(a+c)/2, (b+d)/2$ oraz $(a+d)/2, (b+c)/2$ pokrywają się. Pytam: jakie twierdzenie przestrzenne otrzymałem? To się na ogół podoba słuchaczom.



Dość trudno mi naprowadzić słuchaczy na to, by zapytali „a co dla innych wielokątów?”. Czy łącząc środki boków pięciokąta otrzymamy coś interesującego? Wtedy uznaję, że zajęcia odniosły sukces, bo przenoszę się do sześciokąta i – tu już sam – dowodzę, że jeżeli połączmy środki ciężkości trójkątów $abc, bcd, cde, def, efa, fab$ sześciokąta $abcdef$, to w otrzymanym sześciokącie boki przeciwległe są równoległe. Polecam słuchaczom szukanie dalszych uogólnień, w tym przestrzennych.

Zajęcia takie sprawdzają ważną umiejętność, którą dziś nazywamy modnym terminem kreatywność. Nie bierne oczekiwanie, aż ktoś postawi nam zadanie, ale wychodzenie naprzeciw, wyprzedzanie nauczyciela, inicjatywa, pomysłowość. „Czy umiecie się dziwić?”

Nie każde zagadnienie nadaje się do takiej heurezy – chociaż więcej niż się wydaje. Niestety, najgorzej wypadają takie zajęcia z nauczycielami, którzy najczęściej nie rozumieją, o co mi chodzi. Już nie potrafią sobie wyobrazić innego nauczania niż: zadanie-rozwiązanie, zadanie-rozwiązanie.

Najlepszy dialog zdarzył mi się w ... pewnym mieście, na pewnym uniwersytecie.

– Czy u mnie Pan ułożyć zadanie, w którym byłby obecny taki oto motyw, czy jakieś nawiązanie do niego, analogia, uogólnienie? Łączymy środki boków czworokąta. Powstaje równoległobok. Czy umie Pan tu dostrzec problem, ułożyć zadanie na zbliżony temat?

– Jakie zadanie?

– No, to ja pytam. Chodzi o ułożenie zadania.

– Nie rozumiem. Jakiego zadania? O jakim zadaniu mowa? Jakie zadanie mam rozwiązać?

– Nie rozwiązać, tylko stworzyć. Dowolne, byle kojarzyło się jakkolwiek z tym, z tym rysunkiem, rozumowaniem. Czworokąt, środki boków?

– No, przecież udowodniliśmy, że powstaje równoległobok.

– No właśnie, chodzi o nowe zadanie!

– Nowe? Jakie?

– To Pan ma je ułożyć!

– Ułożyć zadanie? Proszę pana, jestem nauczycielem i uczę dzieci, jak rozwiązywać zadania. Po co mi je układać? Od tego są inni. Zresztą przecież rozwiązaliśmy właśnie to zadanie. Środki boków czworokąta tworzą równoległobok!!

Aż do uzyskania doktoratu rozwój matematyka to rozwiązywanie kolejnych zadań, dostarczanych przez starszych. Również zawody Olimpiady Matematycznej to „tylko” rozwiązywanie zadań. W świadomości wszystkich zostaje na zawsze, że dobry matematyk to ten, który zrećnie rozwiąże nowe zadanie, a nie ten, który ma głęboką, rzetelną wiedzę. Powiedzmy sobie szczerze: to najczęściej idzie w parze. Przyjrzyjmy się.

Myślałem o „alternatywnej olimpiadzie”. Zawodnik dostaje na kartce twierdzenie z dowodem. Jego zadanie polega na uogólnieniu twierdzenia, ewentualnie na znalezieniu jakieś analogii. Ma napisać, co mu się z tym kojarzy.

Wiem, że takie zawody to utopia. Ale na swoich zajęciach czasem je stosuję. Pierwszą reakcją jest zdziwienie „to tak można?” i wątpliwości, podobne do tych, które wyraził mój nauczyciel. Ja mam rozwiązywać zadania, a nie układać.

Liczba zadań na dowodzenie w OM nr 46–59.

OM	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	suma
Edycja	12	16	12	10	16	16	16	16	16	14	9	15	14	10	192
w tym															
1 etap	6	9	7	3	6	10	6	8	8	7	2	8	6	4	90
2 i 3 etap	6	7	5	7	10	6	10	8	8	7	7	7	8	6	102

Przyjrzyjmy się sformułowaniom poleceń zadań 46–60 OM. Na 348 zadań było tam 198 zadań na dowodzenie. Były tylko dwa zadania typu „zobacz, co jest ciekawego”. Zdaję sobie sprawę z dużych trudności w ocenianiu rozwiązań takich zadań. Ciekawe, czy ktoś kiedyś spróbuje.

Dowieść	86
Udowodnić	62
Wykazać	50
Wyznaczyć	77
Rozstrzygnąć	30
Obliczyć	9
Znaleźć	17
Rozwiązać ...	12
Jaki jest	2
Wyrazić	1
Zbadać	2
	348