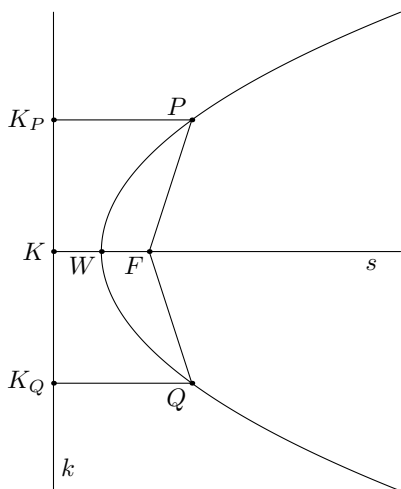


# O paraboli

Wojciech GUZICKI, Warszawa

## 1. Podstawowe definicje

**Parabolą** nazywamy figurę (krzywą) na płaszczyźnie złożoną z tych punktów  $P$ , które są jednakowo odległe od pewnego ustalonego punktu  $F$  i pewnej ustalonej prostej  $k$ . Zakładamy przy tym, że punkt  $F$  nie leży na prostej  $k$ . Punkt  $F$  nazywamy **ogniskiem** paraboli, a prostą  $k$  **kierownicą** paraboli. Niech  $K$  będzie rzutem ogniska na kierownicę i niech  $W$  będzie środkiem odcinka  $KF$ . Wtedy  $WF = WK$ , czyli punkt  $W$  leży na paraboli. Nazywamy go **wierzchołkiem** paraboli.



Rys. 1

Prostą  $s$  przechodzącą przez ognisko i prostopadłą do kierownicy nazywamy **osią** paraboli; przekonamy się, że jest ona osią symetrii paraboli.

Niech bowiem  $P$  będzie dowolnym punktem paraboli i niech  $K_P$  będzie jego rzutem na kierownicę. Wtedy  $PF = PK_P$ . Jeśli  $Q$  jest punktem symetrycznym do  $P$  względem prostej  $s$  i  $K_Q$  jego rzutem na kierownicę, to oczywiście  $QF = PF$  i  $QK_Q = PK_P$ , skąd wynika, że  $QF = QK_Q$ . Zatem punkt  $Q$  też leży na paraboli.

Parabola jest figurą geometryczną zdefiniowaną za pomocą dwóch wyznaczających ją parametrów: ogniska i kierownicy. Ognisko leży na prostej  $s$ , kierownica jest symetryczna względem tej prostej. Nie powinno zatem dziwić, że jeśli parametry paraboli są symetryczne względem osi  $s$ , to sama parabola też jest względem tej osi symetryczna.

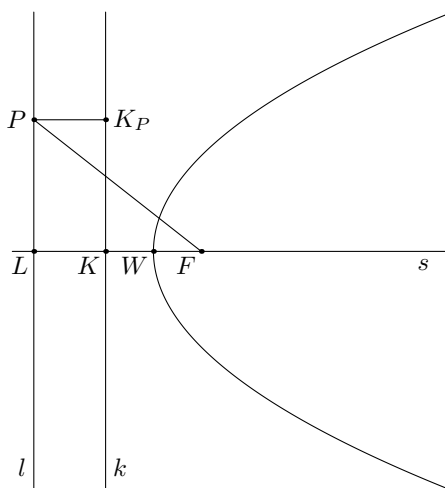
Pierwszym zagadnieniem, które zbadamy, będzie liczba punktów wspólnych paraboli i prostych. W następnych trzech rozdziałach zajmiemy się tym zagadnieniem dla różnych prostych: równoległych do kierownicy, prostopadłych do kierownicy i przecinających kierownicę pod kątem innym niż prosty.

## 2. Parabola i proste równoległe do kierownicy

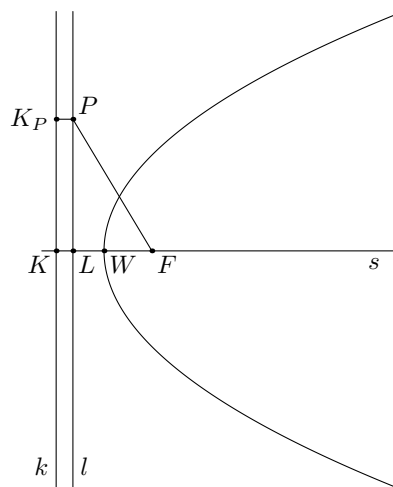
W tym rozdziale udowodnimy trzy proste spostrzeżenia. Oto pierwsze z nich.

**Spostrzeżenie 1.** Jeśli prosta  $l$  równoległa do kierownicy nie przecina półprostej  $WF$ , to nie ma punktów wspólnych z parabolą.

**Dowód.** Niech  $L$  będzie punktem przecięcia prostych  $l$  i  $s$ . Niech  $P$  będzie dowolnym punktem prostej  $l$  i niech  $K_P$  będzie jego rzutem na kierownicę. Punkt  $L$  może leżeć po przeciwnej stronie kierownicy niż parabola, czyli niż punkt  $F$ , (por. rysunek 2) lub leżeć wewnątrz odcinka  $KW$  (por. rysunek 3). Przypadek, gdy  $L = K$  traktujemy tak jak pierwszy z powyższych przypadków.



Rys. 2



Rys. 3

W pierwszym przypadku mamy

$$PK_P = LK < LF \leq PF,$$

a więc punkt  $P$  nie leży na paraboli. W drugim przypadku mamy

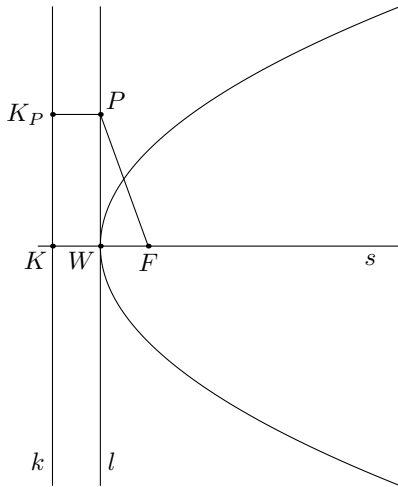
$$PK_P = KL < KW = WF < LF \leq PF,$$

a więc także punkt  $P$  nie leży na paraboli. To kończy dowód.

**Spostrzeżenie 2.** Jeśli prosta  $l$  równoległa do kierownicy przecina oś paraboli w wierzchołku  $W$ , to ten wierzchołek jest jedynym punktem wspólnym prostej  $l$  i paraboli.

**Dowód.** Wiemy już, że punkt  $W$  leży na paraboli. Jest on też punktem prostej  $l$ . Zatem jest punktem wspólnym

prostej  $l$  i paraboli. Pokażemy, że żaden inny punkt prostej  $l$  nie leży na paraboli. Niech więc punkt  $P$  leży na prostej  $l$  (przy czym  $P \neq W$ ) i niech  $K_P$  będzie jego rzutem na kierownicę:

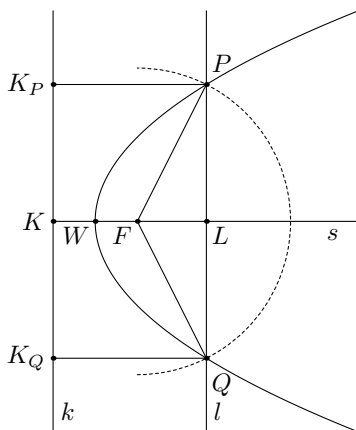


Rys. 4

Wówczas  $PK_P = KW = WF < PF$ , a więc punkt  $P$  nie leży na paraboli. To kończy dowód spostrzeżenia 2.

**Spostrzeżenie 3.** Jeśli prosta  $l$  równoległa do kierownicy przecina półprostą  $WF$  w punkcie różnym od  $W$ , to ma dwa punkty wspólne z parabola.

**Dowód.** Niech  $L$  będzie punktem przecięcia prostej  $l$  z osią paraboli. Jeśli punkt  $L$  leży wewnątrz odcinka  $WF$ , to  $FL < WF = KW < KL$ . Jeśli  $L = F$ , to  $FL = 0$  i oczywiście  $FL < KL$ . Jeśli punkt  $L$  leży na zewnątrz odcinka  $WF$ , to odcinek  $FL$  jest zawarty w odcinku  $KL$ , czyli  $FL < KL$ . We wszystkich przypadkach  $FL < KL$ , czyli odległość ogniska od prostej  $l$  jest mniejsza od długości odcinka  $KL$ . Stąd wynika, że okrąg o środku  $F$  i promieniu  $KL$  przecina prostą  $l$  w dwóch punktach  $P$  i  $Q$ :



Rys. 5

Niech  $K_P$  i  $K_Q$  będą rzutami punktów  $P$  i  $Q$  na kierownicę. Wówczas

$$PK_P = QK_Q = KL = FP = FQ,$$

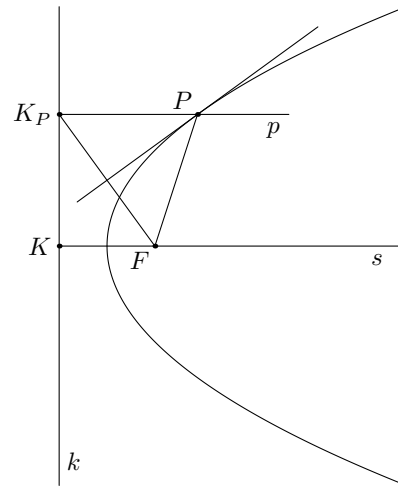
skąd wynika, że punkty  $P$  i  $Q$  leżą na paraboli. Nietrudno zauważyć, że są to jedyne punkty wspólne paraboli i prostej  $l$ . To kończy dowód.

### 3. Parabola i proste prostopadłe do kierownicy

Udowodnimy teraz następujące spostrzeżenie.

**Spostrzeżenie 4.** Prosta prostopadła do kierownicy przecina parabolę w dokładnie jednym punkcie.

**Dowód.** Oczywiście oś paraboli przecina parabolę tylko w jej wierzchołku. Zauważmy następnie, że jeśli  $P$  jest punktem paraboli i  $K_P$  jego rzutem na kierownicę, to  $P$  leży na symetralnej odcinka  $FK_P$ . Niech więc  $K_P$  będzie punktem kierownicy różnym od punktu  $K$ . Wtedy odcinek  $FK_P$  nie jest równoległy do kierownicy, a więc jego symetralna nie jest równoległa do prostej  $p$  prostopadłej do kierownicy i przechodzącej przez punkt  $K_P$ .



Rys. 6

Ta symetralna przecina więc prostą  $p$  w dokładnie jednym punkcie  $P$  leżącym na paraboli. To kończy dowód.

### 4. Parabola i proste przecinające kierownicę pod kątem różnym od prostego

Zajmiemy się wreszcie prostymi przecinającymi kierownicę pod kątem innym niż prosty. Przypuśćmy najpierw, że prosta  $l$  przecina kierownicę w punkcie  $L$  i parabolę w punkcie  $P$ . Niech  $R$  będzie innym punktem prostej  $l$  leżącym po tej samej stronie kierownicy co parabola. Poprowadźmy dwa odcinki:  $RM$  prostopadły do kierownicy i  $RG$  równoległy do  $PF$ . Z podobieństwa trójkątów  $LMR$  i  $LK_P P$  wynika, że

$$\frac{MR}{K_P P} = \frac{LR}{LP}$$

Podobnie z podobieństwa trójkątów  $LRG$  i  $LPF$  wynika, że

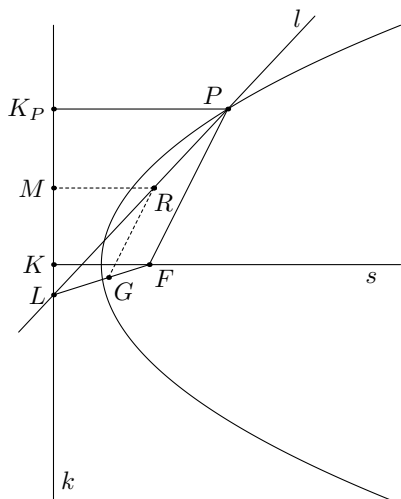
$$\frac{RG}{PF} = \frac{LR}{LP}$$

Stąd dostajemy

$$\frac{MR}{K_P P} = \frac{RG}{PF}$$

Ponieważ z definicji paraboli  $K_P P = PF$ , więc  $MR = RG$ .

Z powyższego rozumowania wynika sposób konstrukcji punktów przecięcia prostej  $l$  z parabola. Opiszemy teraz



Rys. 7

ten sposób. Na prostej  $l$  wybieramy dowolny punkt  $R$  i rzutujemy go na kierownicę, otrzymując punkt  $M$ . Następnie na prostej  $LF$  chcemy znaleźć punkty  $G$  takie, że  $MR = RG$ . W tym celu rzutujemy punkt  $R$  na prostą  $LF$ , otrzymując punkt  $H$  oraz zataczamy okrąg o środku  $R$  i promieniu  $RM$  (zauważmy, że ten okrąg jest styczny do kierownicy w punkcie  $M$ ). Mamy wówczas trzy przypadki.

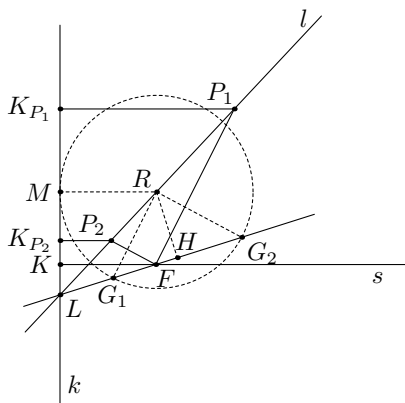
**Przypadek 1.** Zachodzi nierówność  $RH < RM$ , czyli okrąg o środku  $R$  i promieniu  $RM$  przecina prostą  $LF$  w dwóch punktach  $G_1$  i  $G_2$ . Wtedy na prostej  $l$  znajdujemy punkty  $P_1$  i  $P_2$  takie, by odcinki  $FP_1$  i  $FP_2$  były równoległe odpowiednio do  $RG_1$  i  $RG_2$ .

**Spostrzeżenie 5.** Punkty  $P_1$  i  $P_2$  są punktami przecięcia prostej  $l$  z parabolą.

**Dowód.** Prowadzimy dowód jednocześnie dla punktów  $P_1$  i  $P_2$ . Z podobieństwa trójkątów  $LG_iR$  i  $LFP_i$  wynika, że

$$\frac{FP_i}{G_iR} = \frac{LP_i}{LR},$$

gdzie  $i = 1, 2$ .



Rys. 8

Z podobieństwa trójkątów  $LMR$  i  $LK_{P_i}P_i$  wynika, że

$$\frac{K_{P_i}P_i}{MR} = \frac{LP_i}{LR},$$

dla  $i = 1, 2$ . Zatem

$$\frac{FP_i}{G_iR} = \frac{K_{P_i}P_i}{MR}.$$

Punkty  $G_1$  i  $G_2$  zostały wybrane tak, by

$$G_1R = G_2R = MR.$$

Zatem

$$FP_1 = K_{P_1}P_1 \quad \text{oraz} \quad FP_2 = K_{P_2}P_2$$

co dowodzi, że punkty  $P_1$  i  $P_2$  leżą na paraboli. Dowód spostrzeżenia 5 jest więc zakończony.

Z rozważań poprzedzających spostrzeżenie 5 wynika, że punkty wspólne paraboli i prostej muszą być skonstruowane w sposób opisany wyżej. Stąd wynika, że w rozważanym przypadku prosta  $l$  ma dokładnie dwa punkty wspólne z parabolą.

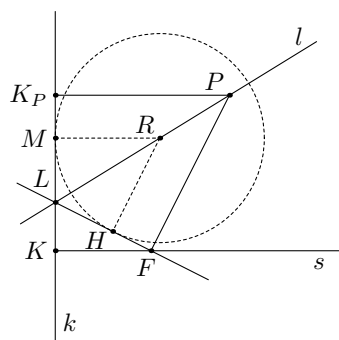
Wyprowadźmy jeszcze jeden wniosek dotyczący kątów. Ponieważ kierownica jest styczna do narysowanego okręgu, a prosta  $LF$  przecina go w dwóch punktach, więc  $LM^2 = LG_1 \cdot LG_2$ . Przyjmijmy, że tak jak na rysunku 8 punkt  $G_1$  leży bliżej punktu  $L$  niż  $G_2$ . Wówczas  $LG_1 < LM < LG_2$ . Zauważmy teraz, że w trójkątach  $LRG_1$  i  $LRM$  mamy dwie pary równych boków: bok  $LR$  jest wspólny oraz  $RM = RG_1$ . Ponieważ  $LM > LG_1$ , więc  $\angle LRM > \angle LRG_1$ . Podobnie  $\angle LRG_2 > \angle LRM$ .

**Przypadek 2.** Zachodzi równość  $RH = RM$ , czyli okrąg o środku  $R$  i promieniu  $RM$  jest styczny do prostej  $LF$ ; punktem styczności jest oczywiście punkt  $H$ . Znajdujemy na prostej  $l$  punkt  $P$  taki, że odcinki  $RH$  i  $PF$  są równoległe.

**Spostrzeżenie 6.** Punkt  $P$  leży na paraboli.

**Dowód.** Z podobieństwa trójkątów  $LHR$  i  $LFP$  wynika, że

$$\frac{FP}{HR} = \frac{LP}{LR}.$$



Rys. 9

Z podobieństwa trójkątów  $LMR$  i  $LK_P P$  wynika, że

$$\frac{K_P P}{MR} = \frac{LP}{LR}.$$

Zatem

$$\frac{FP}{HR} = \frac{K_P P}{MR}.$$

W tym przypadku mamy jednak

$$HR = MR.$$

Zatem

$$FP = K_P P$$

co dowodzi, że punkt  $P$  leży na paraboli. Dowód spostrzeżenia 6 jest więc zakończony.

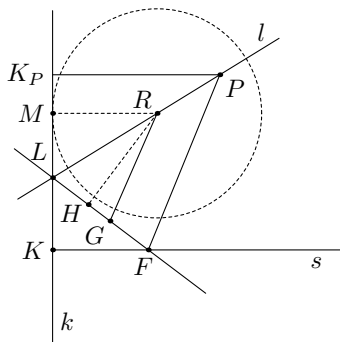
Znów z rozważań poprzedzających spostrzeżenie 5 wynika, że punkty wspólne paraboli i prostej muszą być skonstruowane w sposób opisany wyżej. Stąd wynika, że w rozważanym przypadku prosta  $l$  ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą.

Znów przyjrzyjmy się kątom. Zauważmy, że w tym przypadku trójkąty  $LPF$  i  $LPK_P$  są przystające: są prostokątne,  $FP = K_PP$  oraz mają wspólny bok  $LP$ . Stąd wynika, że  $\angle LPF = \angle LPK_P$ .

**Przypadek 3.** Zachodzi nierówność  $RH > RM$ , czyli okrąg o środku  $R$  i promieniu  $RM$  nie ma punktów wspólnych z prostą  $LF$ . Weźmy dowolny punkt  $P$  prostej  $l$ .

**Spostrzeżenie 7.** Punkt  $P$  nie leży na paraboli.

**Dowód.** Na prostej  $LF$  wybieramy taki punkt  $G$ , by odcinek  $RG$  był równoległy do odcinka  $PF$ .



Rys. 10

Z podobieństwa trójkątów  $LGR$  i  $LFP$  wynika, że

$$\frac{FP}{GR} = \frac{LP}{LR}$$

Z podobieństwa trójkątów  $LMR$  i  $LK_PP$  wynika, że

$$\frac{K_PP}{MR} = \frac{LP}{LR}$$

Zatem

$$\frac{FP}{HR} = \frac{K_PP}{MR}$$

W tym przypadku mamy jednak

$$GR \geq HR > MR.$$

Zatem

$$FP > K_PP$$

co dowodzi, że punkt  $P$  nie leży na paraboli. Dowód spostrzeżenia 7 jest więc zakończony.

## 5. Styczna do paraboli

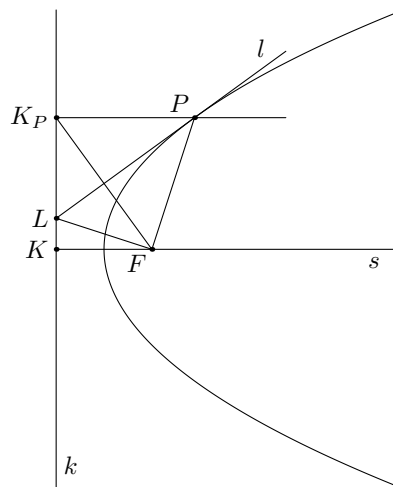
Zobaczyliśmy, że prosta może mieć co najwyżej dwa punkty wspólne z parabolą. Widzieliśmy także, że są dwa różne rodzaje prostych mających jeden punkt wspólny z parabolą. Takimi prostymi są np. proste prostopadłe do kierownicy. Nas będzie interesować ten drugi rodzaj prostych mających jeden punkt wspólny z parabolą.

**Styczną** do paraboli w punkcie  $P$  nazywamy prostą równoległą do osi paraboli mającą tylko jeden punkt  $P$  wspólny z parabolą. Punkt  $P$  nazywamy **punktem**

**styczności**. Wykażemy teraz, że jeśli  $P$  jest dowolnym punktem paraboli, to istnieje dokładnie jedna styczna do paraboli w tym punkcie.

Jeśli punkt  $P$  jest wierzchołkiem paraboli, to prosta przechodząca przez  $P$  i równoległa do kierownicy jest styczną. Nietrudno zauważyć, że jest to jedyna styczna do paraboli w tym punkcie.

Niech  $P$  będzie dowolnym punktem paraboli. Zatem  $PF = PK_P$ . Niech prosta  $l$  będzie symetralną odcinka  $K_PP$ . Wtedy oczywiście prosta  $l$  przechodzi przez punkt  $P$ . Niech  $L$  będzie punktem przecięcia prostej  $l$  z kierownicą paraboli. Ponieważ prosta  $l$  jest symetralną odcinka  $K_PP$ , więc  $K_PL = LP$  i stąd łatwo wynika, że  $\angle K_PLP = \angle FLP$ .



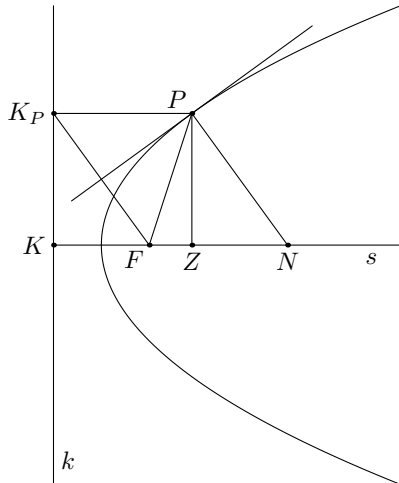
Rys. 11

Z rozważań poprzedniego rozdziału wynika, że prosta  $l$  ma tylko jeden punkt wspólny z parabolą, a więc jest styczna do paraboli.

Przypuśćmy teraz, że prosta  $l$  przechodząca przez punkt  $P$  jest styczna do paraboli. Popatrzmy na rysunek 11. W poprzednim rozdziale udowodniliśmy, że w przypadku, gdy prosta  $l$  ma dwa punkty wspólne z parabolą, to kąty  $LPF$  i  $LPK_P$  nie są równe. W przypadku naszej prostej musi więc zachodzić równość  $\angle LPF = \angle LPK_P$ , skąd łatwo wynika, że prosta  $l$  jest symetralną odcinka  $FK_P$ . To dowodzi, że jedyną styczną do paraboli w punkcie  $P$  jest symetralna odcinka  $K_PP$ .

Omawianie własności stycznych do paraboli zakończymy spostrzeżeniem pochodzącym od Huygensa (według Marka Kordosa to spostrzeżenie było Huygensowi potrzebne do skonstruowania tautochronicznego wahadła obrotowego).

**Spostrzeżenie 8.** Niech  $P$  będzie dowolnym punktem paraboli. Punkt  $Z$  jest rzutem prostokątnym punktu  $P$  na oś paraboli. Punkt  $N$  jest punktem przecięcia osi paraboli z prostą prostopadłą do stycznej i przechodzącą przez punkt  $P$  (inaczej mówiąc, punkt  $N$  otrzymujemy rzutując punkt  $P$  na oś paraboli prostopadłe do stycznej). Wtedy odcinek  $ZN$  ma stałą długość, niezależnie od wyboru punktu  $P$ . Dokładniej,  $ZN = KF$ .



Rys. 12

**Dowód.** Dowodzimy, że trójkąty  $KFK_P$  i  $ZNP$  są przystające. Oba są prostokątne. Ponadto oczywiście  $KK_P = ZP$ . Wystarczy zatem pokazać, że  $\angle K K_P F = \angle Z P N$ . Zauważmy jednak, że

$$K K_P \parallel Z P \quad \text{oraz} \quad K_P F \parallel P N.$$

Mamy zatem dwa kąty ostre o ramionach równoległych, a więc równe.

Z przystawania  $\triangle KFK_P \equiv \triangle ZNP$  wynika natychmiast, że  $ZN = KF$ , co kończy dowód.

## 6. Podział płaszczyzny

Pokażemy teraz, że parabola – podobnie jak okrąg – dzieli płaszczyznę na dwie części, z których jedna jest zbiorem wypukłym.

Zacniemy od prostej obserwacji. Niech  $P$  będzie punktem paraboli i niech  $A$  i  $B$  będą dwoma punktami półprostej  $K_P P$ : punkt  $A$  leży wewnątrz odcinka  $K_P P$ , punkt  $B$  na zewnątrz tego odcinka. Z nierówności trójkąta (dla trójkątów  $FPA$  i  $FPB$ ) otrzymujemy

$$AF + AP > FP \quad \text{oraz} \quad FP + PB > FB.$$

Z pierwszej nierówności otrzymujemy:

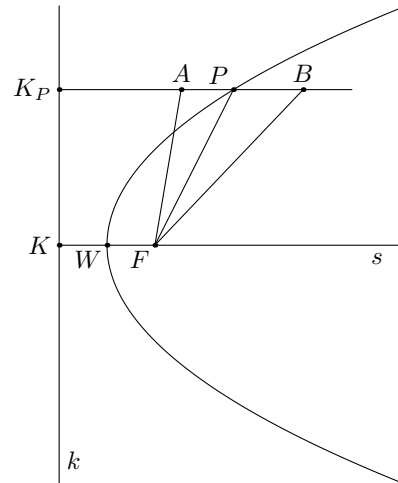
$$\begin{aligned} AF + AP &> K_P P, \\ AF + AP &> K_P A + AP, \\ AF &> K_P A. \end{aligned}$$

Z drugiej otrzymujemy

$$\begin{aligned} K_P P + PB &> FB, \\ K_P B &> FB. \end{aligned}$$

Punkt  $A$  leży zatem bliżej kierownicy niż ogniska, punkt  $B$  leży bliżej ogniska. Niech teraz dany będzie dowolny punkt  $A$  płaszczyzny i niech  $K_A$  będzie jego rzutem na kierownicę. Mówimy, że punkt  $A$  jest **punktem wewnętrznym** paraboli, jeśli  $AF < AK_A$  (czyli leży bliżej ogniska niż kierownicy). Mówimy, że punkt  $A$  jest **punktem zewnętrznym** paraboli, jeśli  $AF > AK_A$  (czyli leży bliżej kierownicy niż ogniska).

Wiemy już, że punkty leżące między parabolą i kierownicą są punktami zewnętrznymi. Bardzo łatwo sprawdzić, że punkty kierownicy oraz punkty leżące



Rys. 13

po przeciwnej stronie kierownicy niż ognisko są też punktami zewnętrznymi. Pokazaliśmy także, że jeśli prosta nie ma punktów wspólnych z parabolą, to wszystkie punkty tej prostej są punktami zewnętrznymi. Punktami wewnętrznymi są punkty położone dalej od kierownicy niż punkty paraboli; na poprzednich rysunkach są to punkty położone na prawo od paraboli.

Pokażemy teraz, że punkty wewnętrzne wraz z punktami paraboli tworzą zbiór wypukły. Udowodnimy najpierw prostą własność trójkąta (tzw. twierdzenie Stewarta).

**Twierdzenie 9.** (Twierdzenie Stewarta) Niech dany będzie trójkąt  $ABC$  i punkt  $D$  na boku  $AB$ . Wówczas

$$BC^2 \cdot AD + AC^2 \cdot BD = CD^2 \cdot AB + AB \cdot AD \cdot BD.$$

**Dowód.** Wprowadźmy oznaczenia:

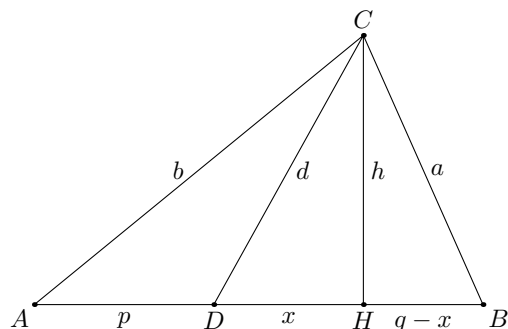
$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB, \quad d = CD, \quad p = AD, \quad q = BD.$$

Wtedy twierdzenie Stewarta wyraża długość odcinka  $d = CD$  za pomocą  $a, b, c, p$  i  $q$ :

$$d^2 = \frac{a^2 p + b^2 q}{c} - pq.$$

Poprowadźmy w trójkącie  $ABC$  wysokość  $CH$  i przyjmijmy oznaczenia  $h = CH$  oraz  $x = DH$ : Korzystając kilkakrotnie z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a^2 &= (q - x)^2 + h^2 = \\ &= q^2 - 2qx + x^2 + h^2 = q^2 - 2qx + d^2, \\ b^2 &= (p + x)^2 + h^2 = \\ &= p^2 + 2px + x^2 + h^2 = p^2 + 2px + d^2. \end{aligned}$$



Rys. 13

Pierwszą z tych równości mnożymy przez  $p$ , drugą przez  $q$ :

$$\begin{aligned} a^2p &= pq^2 - 2pqx + d^2p, \\ b^2q &= p^2q + 2pqx + d^2q. \end{aligned}$$

Wreszcie dodajemy obie równości i korzystamy z tego, że  $p + q = c$ :

$$\begin{aligned} a^2p + b^2q &= pq^2 + p^2q + d^2p + d^2q = \\ &= pq(p + q) + d^2(p + q) = cpq + cd^2, \end{aligned}$$

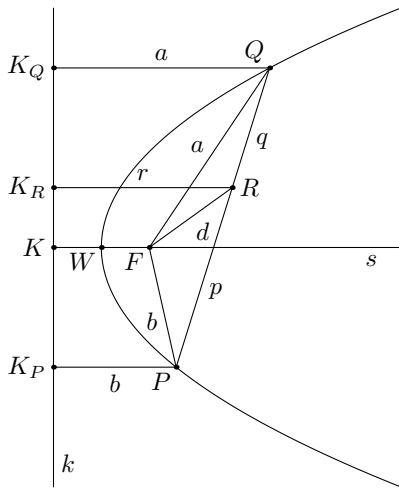
czyli

$$d^2 = \frac{a^2p + b^2q}{c} - pq,$$

co kończy dowód twierdzenia.

**Twierdzenie 10.** Zbiór punktów wewnętrznych paraboli, wraz z punktami paraboli, jest zbiorem wypukłym.

**Dowód.** Wystarczy udowodnić, że jeśli  $P$  i  $Q$  są dowolnymi punktami paraboli i punkt  $R$  jest dowolnym punktem wewnętrznym odcinka  $PQ$ , to punkt  $R$  jest punktem wewnętrznym paraboli. Jak zwykle, niech  $K_P$ ,  $K_Q$  i  $K_R$  będą rzutami punktów  $P$ ,  $Q$  i  $R$  na kierownicę. Chcemy udowodnić, że  $FR < K_RR$ .



Rys. 14

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} a &= FQ = K_QQ, \quad b = FP = K_PP, \quad c = PQ, \quad d = FR, \\ p &= PR, \quad q = QR, \quad r = K_RR. \end{aligned}$$

Mamy udowodnić, że  $d < r$ , czyli równoważnie  $d^2 < r^2$ . Z twierdzenia Stewarta dla trójkąta  $PQF$  wynika, że

$$d^2 = \frac{a^2p + b^2q}{c} - pq.$$

Korzystając z własności trapezu  $K_PPQK_Q$  przeciętego prostą  $K_RR$  równoległą do podstaw, nietrudno pokazać, że

$$r = \frac{ap + bq}{p + q} = \frac{ap + bq}{c}.$$

Mamy zatem pokazać, że

$$\frac{a^2p + b^2q}{c} - pq < \frac{(ap + bq)^2}{c^2}.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny (korzystając z tego, że  $q = c - p$ ):

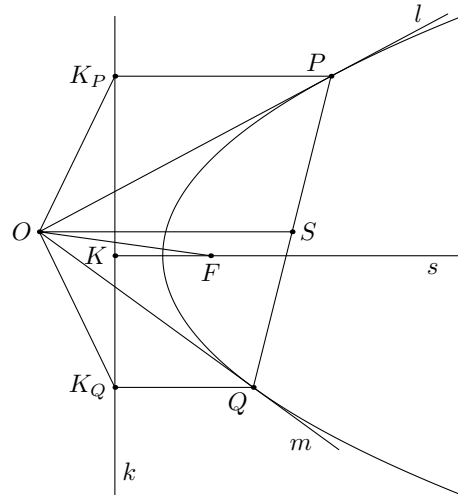
$$c(a^2p + b^2q) - c^2pq < a^2p^2 + 2abpq + b^2q^2,$$

$$\begin{aligned} a^2p^2 + 2abpq + b^2q^2 - a^2cp - b^2cq + c^2pq &> 0, \\ a^2p^2 + 2abp(c - p) + b^2(c - p)^2 - \\ &\quad - a^2cp - b^2c(c - p) + c^2p(c - p) > 0, \\ a^2p^2 + 2abcp - 2abp^2 + b^2c^2 - 2b^2cp + \\ &\quad + b^2p^2 - a^2cp - b^2c^2 + b^2cp + c^3p - c^2p^2 > 0, \\ a^2p^2 + 2abcp - 2abp^2 - b^2cp + b^2p^2 - a^2cp + c^3p - c^2p^2 > 0, \\ p(a^2p + 2abc - 2abp - b^2c + b^2p - a^2c + c^3 - c^2p) &> 0, \\ p(a^2p - 2abp + b^2p - c^2p - a^2c + 2abc - b^2c + c^3) &> 0, \\ p(p(a^2 - 2ab + b^2 - c^2) - c(a^2 - 2ab + b^2 - c^2)) &> 0, \\ p(p - c)(a^2 - 2ab + b^2 - c^2) &> 0, \\ p(p - c)((a - b)^2 - c^2) &> 0, \\ p(p - c)(a - b - c)(a - b + c) &> 0, \\ p(c - p)(b + c - a)(a + c - b) &> 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż  $0 < p < c$ ,  $b + c > a$  oraz  $a + c > b$ . To kończy dowód tego, że  $d < r$ , a więc kończy dowód twierdzenia.

## 7. Punkty przecięcia stycznych do paraboli

W tym rozdziale zajmiemy się punktami przecięcia stycznych do paraboli. Załóżmy, że dane są proste  $l$  i  $m$  styczne do paraboli: prosta  $l$  w punkcie  $P$ , prosta  $m$  w punkcie  $Q$ . Zauważmy najpierw, że proste  $l$  i  $m$  przecinają się. Mianowicie te proste są symetralnymi odcinków  $K_PP$  i  $K_QQ$ . Ponieważ punkty  $K_P$ ,  $K_Q$  i  $F$  nie są współliniowe, więc te dwie symetralne przecinają



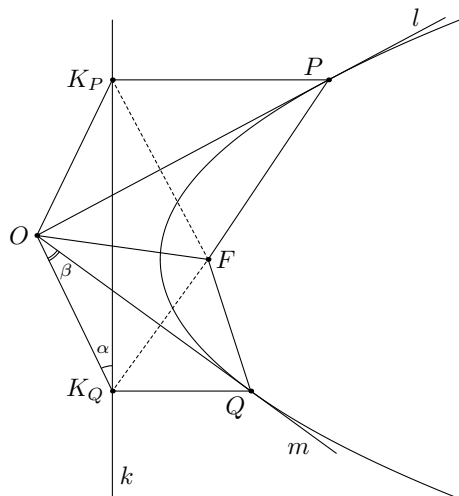
Rys. 15

się. Niech więc  $O$  będzie punktem przecięcia naszych dwóch stycznych. Poprowadźmy przez punkt  $O$  prostą prostopadłą do kierownicy i przecinającą odcinek  $PQ$  w punkcie  $S$ .

**Spostrzeżenie 11.** Punkt  $S$  jest środkiem odcinka  $PQ$ .

**Dowód.** Punkt  $O$  leży na symetralnej odcinka  $K_PP$ , więc  $OK_P = OF$ . Podobnie, punkt  $O$  leży na symetralnej odcinka  $K_QQ$ , więc  $OK_Q = OF$ . Zatem  $OK_P = OK_Q$ , czyli punkt  $O$  leży na symetralnej odcinka  $K_PP$ . Symetralna odcinka  $K_PP$  oczywiście przecina odcinek  $PQ$  w środku. To kończy dowód.

Udowodnimy jeszcze jedną ważną własność punktu przecięcia stycznych do paraboli. Zachowajmy oznaczenia z rysunku 15 i dorysujmy odcinki  $FP$  i  $FQ$ .



Rys. 16

**Spostrzeżenie 12.** Trójkąty  $OFQ$  i  $PFO$  są podobne.

**Dowód.** Przyjmijmy oznaczenia:  $\alpha = \angle OK_QK_P$  oraz  $\beta = \angle QOK_Q$ . Obliczmy najpierw kąty trójkąta  $OK_QQ$ :

$$\begin{aligned} \angle QOK_Q &= \beta, & \angle OK_QQ &= \alpha + 90^\circ, \\ \angle K_QQO &= 90^\circ - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Ponieważ trójkąty  $OK_QQ$  i  $OFQ$  są przystające, więc  $\angle QOF = \beta$ ,  $\angle OFQ = \alpha + 90^\circ$ ,  $\angle FQO = 90^\circ - \alpha - \beta$ .

Następnie zauważmy, że  $\angle OK_PK_Q = \alpha$ , skąd wynika, że  $\angle K_POK_Q = 180^\circ - 2\alpha$ . Zatem  $\angle K_POF = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ , a więc  $\angle K_POP = 90^\circ - \alpha - \beta$ .

Możemy zatem obliczyć kąty trójkąta  $OPK_P$ :

$$\begin{aligned} \angle POK_P &= 90^\circ - \alpha - \beta, & \angle OK_PP &= \alpha + 90^\circ, \\ \angle OPK_P &= \beta. \end{aligned}$$

Z przystawiania trójkątów  $OPK_P$  i  $OPF$  dostajemy  $\angle POF = 90^\circ - \alpha - \beta$ ,  $\angle OFP = \alpha + 90^\circ$ ,  $\angle OPF = \beta$ .

Zatem  $\triangle OFQ \sim \triangle PFO$ :

$$\begin{aligned} \angle OFQ &= \angle PFO = \alpha + 90^\circ, & \angle QOF &= \angle OPF = \beta, \\ \angle FQO &= \angle FOP = 90^\circ - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Nietrudno pokazać, że te trójkąty są podobne także przy innych położeniach punktu  $O$ ; dowód różni się nieistotnymi szczegółami. To kończy dowód spostrzeżenia 11.

Odnotujmy jeszcze dwie własności punktu przecięcia stycznych do paraboli.

**Spostrzeżenie 13.** Mamy równość  $\angle OFP = \angle OFQ$ , czyli punkt  $O$  przecięcia stycznych leży na dwusiecznej kąta  $PFQ$ .

Dowód wynika natychmiast ze spostrzeżenia 12.

**Spostrzeżenie 14.** Jeśli  $O$  jest dowolnym punktem zewnętrznym paraboli, to istnieją dokładnie dwa punkty  $P$  i  $Q$  paraboli takie, że styczne do paraboli w tych punktach przecinają się w punkcie  $O$ .

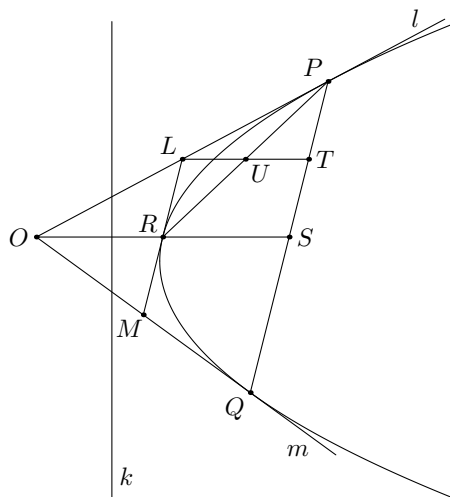
**Dowód.** Ponieważ  $O$  jest punktem zewnętrznym paraboli, więc odległość punktu  $O$  od kierownicy jest mniejsza niż odległość punktu  $O$  od ogniska. Zatem na kierownicy istnieją dokładnie dwa punkty  $K_P$  i  $K_Q$  takie, że  $OK_P = OF = OK_Q$ . Punkt  $O$  leży zatem na symetralnych odcinków  $K_PP$  i  $K_QQ$ . Punkty przecięcia tych symetralnych z prostymi prostopadłymi do kierownicy i przechodzącymi odpowiednio przez punkty  $K_P$  i  $K_Q$  są szukanymi punktami  $P$  i  $Q$  paraboli. Szczegóły dowodu pozostawimy jako ćwiczenie.

## 8. Centrum łuku paraboli

Widzieliśmy (Spostrzeżenie 11), że prosta równoległa do osi paraboli i przechodząca przez punkt przecięcia stycznych w punktach  $P$  i  $Q$  przecina cięciwę  $PQ$  w jej środku. W tym rozdziale zajmiemy się własnościami punktu przecięcia wspomnianej prostej z parabola.

Niech dane będą dwa punkty  $P$  i  $Q$  leżące na paraboli. Niech następnie prosta przechodząca przez środek cięciwy  $PQ$  i równoległa do osi paraboli przecina parabolę w punkcie  $R$ . Punkt  $R$  nazwiemy **centrum łuku**  $PQ$  paraboli. Udowodnimy dwie własności centrum łuku.

**Twierdzenie 15.** Centrum łuku jest środkiem odcinka łączącego środek cięciwy z punktem przecięcia stycznych (na rysunku 17 jest to równość  $OR = RS$ ). Ponadto styczna do paraboli w centrum łuku jest równoległa do cięciwy  $PQ$ .



Rys. 17

**Dowód.** Poprowadźmy styczną do paraboli w punkcie  $R$  przecinającą styczne  $l$  i  $m$  odpowiednio w punktach  $L$  i  $M$ . Poprowadźmy również prostą równoległą do osi paraboli i przechodzącą przez punkt  $L$ . Przecina ona cięciwę  $PQ$  w punkcie  $T$  i cięciwę  $PR$  w punkcie  $U$ . Punkt  $L$  jest punktem przecięcia stycznych do paraboli w punktach  $P$  i  $R$ . Zatem prosta  $LU$  równoległa do osi paraboli przecina cięciwę  $PU$  w jej środku. Stąd wynika, że odcinek  $UT$  jest linią środkową w trójkącie  $RSP$ , a więc punkt  $T$  jest środkiem odcinka  $PS$ . Podobnie odcinek  $LT$  jest linią środkową w trójkącie  $OSP$  i punkt  $L$  jest środkiem odcinka  $OP$ . W podobny

sposób pokazujemy, że punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $OQ$ . Z twierdzenia Talesa wynika teraz, że  $LM \parallel PQ$ , oraz że punkt  $R$  jest środkiem odcinka  $OS$ . To kończy dowód twierdzenia.

**Spostrzeżenie 16.** Równoległe cięciwy paraboli mają wspólne centrum wyznaczonych przez nie łuków.

**Dowód.** Przypuśćmy, że  $PQ$  jest cięciwą paraboli i punkt  $R$  jest centrum łuku  $PQ$ . Wiemy, że styczna w punkcie  $R$  jest równoległa do cięciwy  $PQ$ . Niech teraz  $XY$  będzie cięciwą równoległą do cięciwy  $PQ$  i niech  $S$  będzie centrum łuku  $XY$ . Styczna w punkcie  $S$  jest równoległa do cięciwy  $XY$ . Zatem styczne w punktach  $R$  i  $S$  są równoległe. Widzieliśmy jednak, że dowolne dwie styczne do paraboli przecinają się. Zatem styczne w punktach  $R$  i  $S$  pokrywają się, czyli  $R = S$ . To kończy dowód.

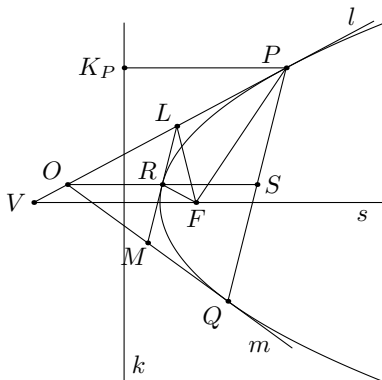
## 9. Zależność kwadratowa

Wiemy ze szkoły, że parabola jest wykresem funkcji kwadratowej. Chcemy teraz wyrazić tę własność w języku geometrii i podać geometryczny dowód tej zależności kwadratowej.

**Twierdzenie 17.** Niech punkt  $S$  będzie środkiem cięciwy  $PQ$  paraboli i niech  $R$  będzie centrum łuku  $PQ$ . Wówczas

$$SP^2 = 4 \cdot RF \cdot RS.$$

**Dowód.** Przypuśćmy, że dana jest cięciwa  $PQ$  paraboli. Niech punkt  $R$  będzie centrum łuku  $PQ$  i niech punkt  $O$  będzie punktem przecięcia stycznych  $l$  i  $m$  do paraboli odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$ . Styczna do paraboli w punkcie  $R$  przecina styczne  $l$  i  $m$  odpowiednio w punktach  $L$  i  $M$ . Niech punkt  $V$  będzie punktem przecięcia stycznej  $l$  z osią paraboli. Zaznaczmy jeszcze na rysunku 18 ognisko  $F$  i rzut  $K_P$  punktu  $P$  na kierownicę.



Rys. 18

Punkt  $L$  jest punktem przecięcia stycznych do paraboli w punktach  $P$  i  $R$ . Stąd wynika, że trójkąty  $FRL$  i  $FLP$  są podobne. Chcemy pokazać, że trójkąt  $ORL$  jest podobny do tych dwóch trójkątów. Zauważmy w tym celu, że

$$\begin{aligned} \angle ROL &= \angle POS = \angle PVF = \angle VPK_P = \\ &= \angle VPF = \angle LPF. \end{aligned}$$

Następnie

$$\begin{aligned} \angle OLR &= 180^\circ - \angle RLP = 180^\circ - (\angle RLF + \angle FLP) = \\ &= 180^\circ - (\angle LPF + \angle FLP) = \angle PFL. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że  $\triangle ORL \sim \triangle PLF \sim \triangle LRF$ . Mamy zatem

$$\frac{OR}{RL} = \frac{RL}{RF},$$

czyli

$$RL^2 = OR \cdot RF.$$

Następnie  $RL = \frac{1}{2} \cdot SP$  oraz  $OR = RS$ . Stąd wynika, że

$$\left(\frac{1}{2} \cdot SP\right)^2 = RS \cdot RF,$$

czyli

$$SP^2 = 4 \cdot RF \cdot RS,$$

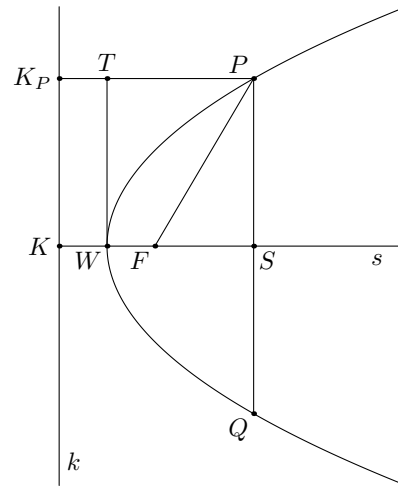
co kończy dowód twierdzenia.

Przyjrzyjmy się dokładniej szczególnemu przypadkowi, gdy cięciwa  $PQ$  jest prostopadła do osi paraboli.

**Spostrzeżenie 18.** Jeśli cięciwa  $PQ$  jest prostopadła do osi paraboli, punkt  $S$  jest środkiem cięciwy  $PQ$  i punkt  $W$  jest wierzchołkiem paraboli, to

$$SP^2 = 4 \cdot WF \cdot WS.$$

**Dowód.** Zauważmy, że wierzchołek  $W$  paraboli jest centrum łuku  $PQ$ . Niech  $T$  będzie punktem przecięcia stycznej do paraboli w wierzchołku z odcinkiem  $K_P P$ .



Rys. 19

Udowodniona w twierdzeniu 17 zależność przyjmuje postać  $SP^2 = 4 \cdot WF \cdot WS$ , co kończy dowód.

Spostrzeżenie 18 możemy sformułować w następujący sposób:

$$TP = WS = \frac{SP^2}{4 \cdot WF} = \frac{WT^2}{4 \cdot WF}.$$

Odcinek  $TP$  jest zatem proporcjonalny do kwadratu odcinka  $WT$ , co dokładnie wyraża w sposób geometryczny to, że parabola jest wykresem funkcji kwadratowej

$$y = \frac{1}{4 \cdot WF} \cdot x^2,$$

gdzie  $x = WT$  i  $y = TP$ .

Ogólnie, w twierdzeniu 17 wykazaliśmy, że odcinek  $RS$  jest proporcjonalny do kwadratu odcinka  $SP$ . Można powiedzieć, że jest to ta sama zależność kwadratowa



w ukośnokątnym układzie współrzędnych. W takim układzie centrum łuku  $PQ$  odgrywa rolę wierzchołka paraboli; ponieważ każdy punkt paraboli jest centrum pewnego łuku, więc można powiedzieć, że każdy punkt paraboli jest w pewnym sensie jej wierzchołkiem.

### 10. Lemat Archimedesesa

W tym rozdziale skorzystamy z następującej własności proporcji. Niech liczby rzeczywiste  $a$ ,  $b$  i  $c$  takie, że  $a > b > c$  spełniają proporcję

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

Wówczas

$$\frac{a}{b} = \frac{a-b}{b-c} = \frac{a+b}{b+c}.$$

Z założenia wynika bowiem, że  $ac = b^2$ . Odejmując  $ab$  od obu stron otrzymujemy

$$\begin{aligned} ac - ab &= b^2 - ab, \\ ab - ac &= ab - b^2, \\ a(b-c) &= b(a-b), \\ \frac{a}{b} &= \frac{a-b}{b-c}. \end{aligned}$$

Podobnie, dodając do obu stron  $ab$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} ab + ac &= ab + b^2, \\ a(b+c) &= b(a+b), \\ \frac{a}{b} &= \frac{a+b}{b+c}. \end{aligned}$$

Udowodnimy najpierw twierdzenie pomocnicze, po którym podamy dowód najważniejszego twierdzenia tego rozdziału, tzw. lematu Archimedesesa.

**Twierdzenie 19.** Dane są dwie równoległe cięciwy  $PQ$  i  $XY$  paraboli. Niech  $R$  będzie wspólnym centrum łuków  $PQ$  i  $XY$ . Niech  $Z$  będzie punktem przecięcia cięciwy  $PQ$  z prostą równoległą do osi paraboli i przechodzącą przez punkt  $X$ . Niech następnie  $S$  będzie środkiem cięciwy  $PQ$  (przypominamy, że odcinek  $RS$  jest równoległy do osi paraboli),  $T$  punktem przecięcia odcinków  $XY$  i  $RS$ ,  $U$  punktem przecięcia prostej  $PR$  i cięciwy  $XY$ , wreszcie  $V$  punktem przecięcia prostych  $PR$  i  $XZ$ . Wówczas

$$\frac{RP}{RV} = \frac{VZ}{VX}.$$

**Dowód.** Przyjmijmy najpierw, że punkt  $X$  leży na łuku  $PR$ . Ponieważ  $R$  jest centrum obu cięciw  $PQ$  i  $XY$ , więc

$$PS^2 = 4 \cdot RF \cdot RS \quad \text{oraz} \quad XT^2 = 4 \cdot RF \cdot RT.$$

Stąd wynika, że

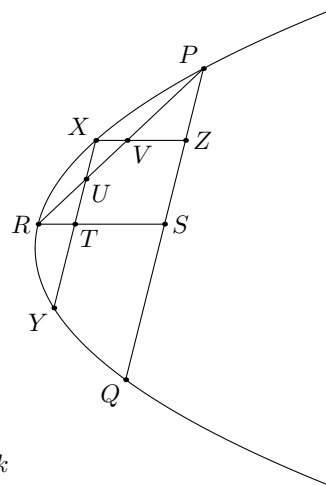
$$\frac{PS^2}{XT^2} = \frac{RS}{RT}.$$

Mamy następnie (korzystając z twierdzenia Talesa)

$$\frac{PS}{XT} = \frac{PS}{ZS} = \frac{RP}{RV}$$

oraz

$$\frac{RS}{RT} = \frac{RP}{RU}.$$



Rys. 20

Stąd wynika, że

$$\frac{RP^2}{RV^2} = \frac{RP}{RU},$$

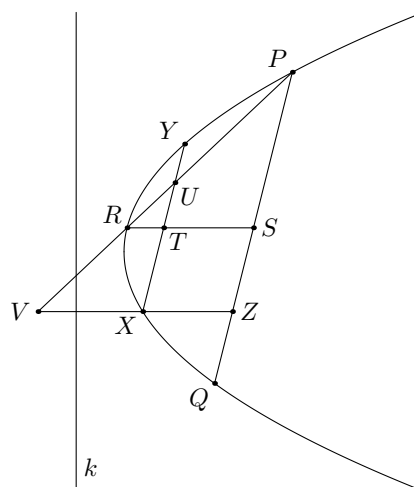
czyli

$$\frac{RP}{RV} = \frac{RV}{RU}.$$

Korzystając z udowodnionych wyżej własności proporcji, dostajemy

$$\frac{RP}{RV} = \frac{RP - RV}{RV - RU} = \frac{VP}{UV} = \frac{VZ}{VX}.$$

Przyjmijmy teraz, że punkt  $X$  leży na łuku  $RQ$ .



Rys. 21

Dokładnie tak jak w poprzednim przypadku dochodzimy do proporcji

$$\frac{RP}{RV} = \frac{RV}{RU}.$$

Korzystamy teraz z drugiej z udowodnionych wyżej własności proporcji, otrzymując

$$\frac{RP}{RV} = \frac{RP + RV}{RV + RU} = \frac{VP}{UV} = \frac{VZ}{VX},$$

co kończy dowód twierdzenia.

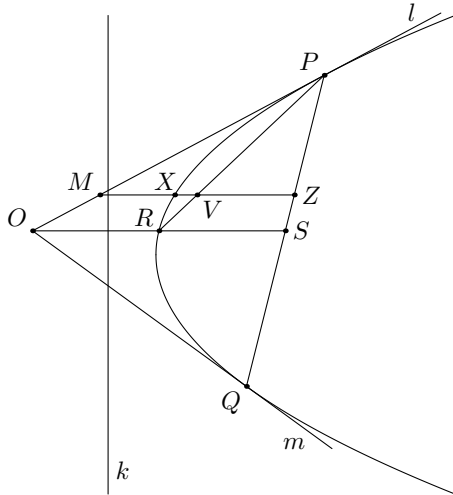
Możemy teraz przystąpić do dowodu tzw. lematu Archimedesesa.

**Twierdzenie 20.** (Lemat Archimedesesa) Dana jest cięciwa  $PQ$  paraboli. Niech  $R$  będzie centrum łuku  $PQ$  i niech  $X$  będzie dowolnym punktem łuku  $PQ$ .

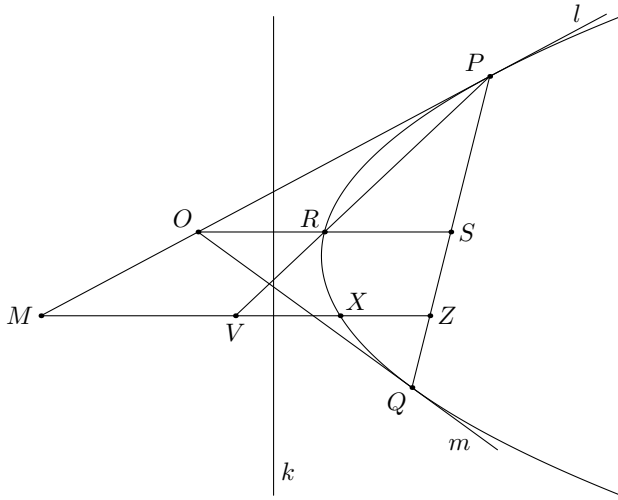
Niech następnie  $O$  będzie punktem przecięcia stycznych do paraboli w punktach  $P$  i  $Q$  i niech  $S$  będzie środkiem cięwiwy  $PQ$  (przypominamy, że odcinek  $OS$  jest równoległy do osi paraboli i punkt  $R$  jest jego środkiem). Prosta równoległa do osi paraboli i przechodząca przez punkt  $X$  przecina cięwiwę  $PQ$  w punkcie  $Z$ , styczną  $OP$  w punkcie  $M$  i prostą  $PR$  w punkcie  $V$ . Wówczas

$$\frac{QZ}{PQ} = \frac{XZ}{MZ}.$$

**Dowód.** Możliwe są dwa położenia punktu  $X$ : na łuku  $PR$  lub na łuku  $QR$ .



Rys. 22



Rys. 23

Wiemy, że niezależnie od położenia punktu  $X$  na łuku  $PQ$ , prawdziwa jest proporcja

$$\frac{RP}{RV} = \frac{VZ}{VX}.$$

Z twierdzenia Talesa wynika, że

$$\frac{RP}{RV} = \frac{PS}{SZ}.$$

Zatem, korzystając także z równości  $PS = QS$ , dostajemy

$$\frac{QS}{SZ} = \frac{PS}{SZ} = \frac{VZ}{VX},$$

czyli

$$\frac{SZ}{QS} = \frac{VX}{VZ}.$$

Stąd, dla punktu  $X$  położonego na łuku  $PR$ , dostajemy

$$\begin{aligned} 1 + \frac{SZ}{QS} &= 1 + \frac{VX}{VZ}, \\ \frac{QS + SZ}{QS} &= \frac{VZ + VX}{VZ}, \\ \frac{QZ}{QS} &= \frac{XZ}{VZ}, \\ \frac{QZ}{2 \cdot QS} &= \frac{XZ}{2 \cdot VZ}, \\ \frac{QZ}{PQ} &= \frac{XZ}{MZ}. \end{aligned}$$

Dla punktu  $X$  położonego na łuku  $QR$  mamy natomiast

$$\begin{aligned} 1 - \frac{SZ}{QS} &= 1 - \frac{VX}{VZ}, \\ \frac{QS - SZ}{QS} &= \frac{VZ - VX}{VZ}, \\ \frac{QZ}{QS} &= \frac{XZ}{VZ}, \\ \frac{QZ}{2 \cdot QS} &= \frac{XZ}{2 \cdot VZ}, \\ \frac{QZ}{PQ} &= \frac{XZ}{MZ}. \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu Archimedesesa.

## 11. Pole odcinka paraboli – metoda mechaniczna

**Odcinkiem paraboli** nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łukiem paraboli i cięwiwą łączącą końce tego łuku. W tym rozdziale pokażemy, w jaki sposób Archimedes obliczył pole odcinka paraboli, korzystając przy tym z wyprowadzonych wcześniej podstawowych praw mechaniki.

**Twierdzenie 21.** Dana jest cięwiwa  $PQ$  paraboli i centrum  $R$  łuku  $PQ$ . Wówczas pole odcinka paraboli ograniczonego cięwiwą  $PQ$  i łukiem  $PQ$  jest równe

$$P_{odc} = \frac{4}{3} \cdot P_{PQR}.$$

**Dowód.** Niech  $O$  będzie punktem przecięcia stycznych do paraboli w punktach  $P$  i  $Q$ . Niech punkt  $S$  będzie środkiem cięwiwy  $PQ$ . Przypominamy, że punkt  $R$  jest środkiem odcinka  $OS$ . Poprowadźmy odcinek  $QN$  prostopadły do kierownicy. Niech  $X$  będzie dowolnym punktem łuku  $PQ$  i poprowadźmy odcinek

$MZ$  prostopadły do kierownicy i przechodzący przez punkt  $X$ . Prosta  $PR$  przecina odcinki  $MZ$  i  $NQ$  odpowiednio w punktach  $V$  i  $U$ . Ponieważ punkt  $R$  jest środkiem odcinka  $OS$ , więc punkty  $V$  i  $U$  są środkami odcinków  $MZ$  i  $NQ$ . Niech wreszcie punkt  $G$  będzie środkiem ciężkości trójkąta  $NQP$ ; leży on oczywiście na środkowej  $PU$  oraz  $PG = \frac{2}{3} \cdot PU$ .

Przedłużmy odcinek  $PU$  do punktu  $H$  takiego, że  $PU = UH$ . Teraz z lematu Archimedesesa wiemy, że

$$\frac{QZ}{PQ} = \frac{XZ}{MZ}.$$



$$\begin{aligned}
P_{F_1} + P_{F_2} + P_{F_3} &> \\
&> P_{F_1} + P_{F_2} + \frac{1}{2} \cdot (P_F - P_{F_1} - P_{F_2}) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot P_F + \frac{1}{2} \cdot (P_{F_1} + P_{F_2}) > \\
&> \frac{1}{2} \cdot P_F + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot P_F + \frac{1}{4} \cdot P_F \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot P_F + \frac{1}{4} \cdot P_F + \frac{1}{8} \cdot P_F,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{F_1} + P_{F_2} + P_{F_3} + P_{F_4} &> \\
&> P_{F_1} + P_{F_2} + P_{F_3} + \frac{1}{2} \cdot (P_F - P_{F_1} - P_{F_2} - P_{F_3}) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot P_F + \frac{1}{2} \cdot (P_{F_1} + P_{F_2} + P_{F_3}) > \\
&> \frac{1}{2} \cdot P_F + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot P_F + \frac{1}{4} \cdot P_F + \frac{1}{8} \cdot P_F \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot P_F + \frac{1}{4} \cdot P_F + \frac{1}{8} \cdot P_F + \frac{1}{16} \cdot P_F
\end{aligned}$$

i tak dalej. Możemy teraz przejść do sum nieskończonych. Mamy

$$\begin{aligned}
P_F &\geq P_{F_1} + P_{F_2} + P_{F_3} + \dots \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \cdot P_F + \frac{1}{4} \cdot P_F + \frac{1}{8} \cdot P_F + \dots = P_F.
\end{aligned}$$

Pierwsza nierówność wynika z własności 1; figury  $F_1, F_2, F_3, \dots$  są zawarte w figurze  $F$  i nie zachodzą na siebie. Druga nierówność wynika z powyższych rozważań. Trzecia wynika ze wzoru

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1,$$

znanego już w starożytności.

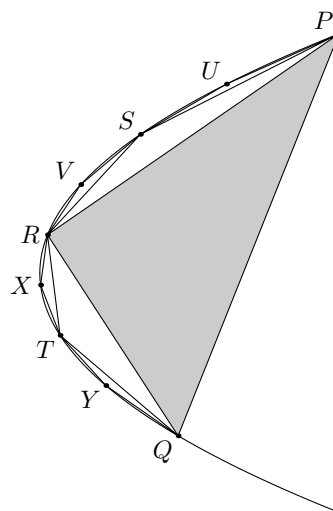
Do obliczenia pola figury  $F$  metodą wyczerpywania potrzebne jest zatem:

1. wskazanie niezachodzących na siebie figur  $F_1, F_2, F_3, \dots$  zawartych w figurze  $F$ ,
2. wykazanie, że każda figura  $F_n$  stanowi więcej niż połowę „tego, co zostało”,
3. obliczenie pól figur  $F_1, F_2, F_3, \dots$ ,
4. obliczenie sumy  $P_{F_1} + P_{F_2} + P_{F_3} + \dots$ .

W następnym rozdziale pokażemy, w jaki sposób Archimedes zrealizował te cztery cele w odniesieniu do pola odcinka paraboli.

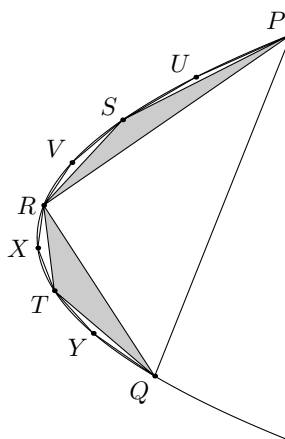
### 13. Pole odcinka paraboli – metoda geometryczna

Niech  $PQ$  będzie cięciwą paraboli. Chcemy obliczyć pole odcinka paraboli ograniczonego cięciwą  $PQ$  i łukiem  $PQ$ . Ten odcinek paraboli będzie naszą figurą  $F$  (przy zachowaniu oznaczeń z poprzedniego rozdziału). Niech punkt  $R$  będzie centrum łuku  $PQ$ . Figurą  $F_1$  jest trójkąt  $PQR$ . Niech następnie punkty  $S$  i  $T$  będą odpowiednio centrami łuków  $PR$  i  $QR$ . Figura  $F_2$  składa się z dwóch trójkątów  $PRS$  i  $QRT$ . Zauważmy bowiem, że w rozważaniach poprzedniego rozdziału nigdzie nie zakładaliśmy, by figury  $F_n$  były „w jednym kawałku”. Można przyjąć, że każda z nich składa się z wielu wielokątów (mówiąc inaczej, jest sumą wielu wielokątów).

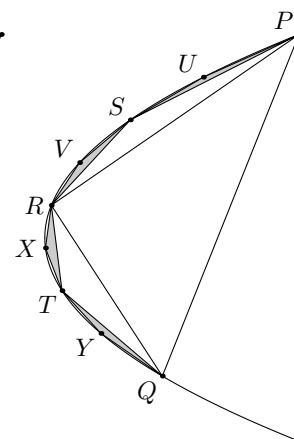


Rys. 25

Podobnie figura  $F_3$  składa się z czterech trójkątów:  $PUS, SVR, RXT$  i  $TYQ$ , gdzie punkty  $U, V, X$  i  $Y$  są odpowiednio centrami łuków  $PS, SR, RT$  i  $TQ$ . Następna figura  $F_4$  składałaby się z ośmiu trójkątów, których podstawami byłyby cięciwy  $PU, US, SV, VR, RX, XT, TY$  i  $YQ$ , a wierzchołkami centra łuków wyznaczonych przez te cięciwy. I tak dalej...



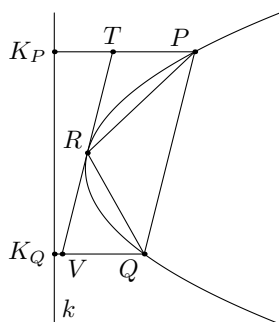
Rys. 26



Rys. 27

Figury  $F_1, F_2, F_3, \dots$  zostały zatem wskazane. Musimy najpierw pokazać, że pole każdej z nich jest większe od tego, co zostało po wyjęciu poprzednich. Zauważmy, że każda z tych figur składa się z trójkątów tej samej postaci: podstawą jest cięciwa paraboli, a wierzchołkiem centrum łuku ograniczonego tą cięciwą. Wystarczy zatem pokazać, że każdy taki trójkąt jest większy od połowy odcinka paraboli. Niech  $PQ$  będzie dowolną cięciwą paraboli i  $R$  centrum łuku  $PQ$ . Niech następnie styczna do paraboli w punkcie  $R$  przecina proste  $K_P P$  i  $K_Q Q$  odpowiednio w punktach  $T$  i  $V$ . Przypominamy, że styczna w punkcie  $R$  jest równoległa do cięciwy  $PQ$  i leży na zewnątrz paraboli. Stąd wynika, że czworokąt  $VQPT$  jest równoległobokiem i rozważany odcinek paraboli leży całkowicie w jego wnętrzu. Zatem

$$P_{odc} < P_{UQPT} = 2 \cdot P_{PQR}.$$



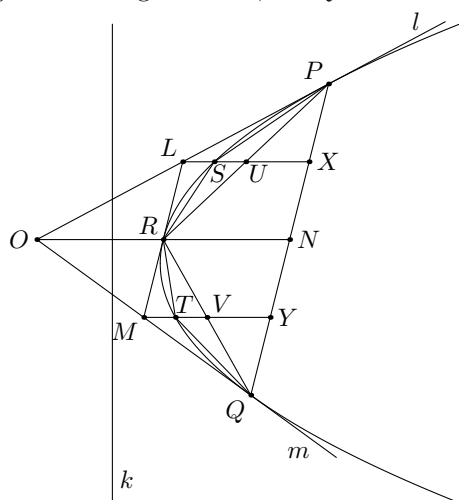
Rys. 28

Stąd wynika, że

$$P_{PQR} > \frac{1}{2} \cdot P_{odc.}$$

Pozostają do obliczenia pola figur  $F_1, F_2, F_3, \dots$  i ich suma.

Niech  $PQ$  będzie cięciwą paraboli i  $R$  centrum łuku  $PQ$ . Styczne do paraboli w punktach  $P$  i  $Q$  przecinają się w punkcie  $O$ . Przypominamy, że prosta  $OR$  jest równoległa do osi paraboli i punkt  $R$  jest środkiem odcinka  $ON$ , przy czym punkt  $S$  jest środkiem cięciwy  $PQ$ . Powtórzmy teraz tę konstrukcję dla cięciwy  $PR$ . Styczne w punktach  $P$  i  $R$  przecinają się w punkcie  $L$ . Niech  $S$  będzie centrum łuku  $PR$  i niech punkt  $U$  będzie środkiem cięciwy  $PR$ . Wtedy odcinek  $LU$  jest równoległy do osi paraboli i punkt  $T$  jest środkiem tego odcinka. Niech wreszcie  $X$  będzie punktem przecięcia prostej  $LU$  z cięciwą  $PQ$ . Ponieważ punkt  $U$  jest środkiem boku  $RP$  trójkąta  $RNP$  oraz odcinek  $UX$  jest równoległy do podstawy  $RN$ , więc punkt  $X$  jest środkiem boku  $NP$  oraz  $UX = \frac{1}{2} \cdot RN$ . Czworokąt  $RNXL$  jest równoległobokiem, a więc  $LX = RN$ .



Rys. 29

Stąd wynika, że  $LU = \frac{1}{2} \cdot RN$ . Ponieważ punkt  $S$  jest środkiem odcinka  $LU$ , więc  $SU = \frac{1}{4} \cdot RN$ . Popatrzmy teraz na trójkąty  $SUP$  i  $RNP$ . Podstawa  $SU$  trójkąta  $SUP$  jest cztery razy mniejsza od podstawy  $RN$  trójkąta  $RNP$ . Wysokość trójkąta  $SUP$  jest dwa razy

mniejsza od wysokości trójkąta  $RNP$ . Stąd wynika, że  $P_{SUP} = \frac{1}{8} \cdot P_{RNP}$ . Zauważmy wreszcie, że trójkąty  $SUP$  i  $SUR$  mają wspólną podstawę  $SU$  i równe wysokości. Zatem  $P_{SUP} = P_{SUR}$ . Łącznie otrzymujemy

$$P_{PRS} = P_{SUP} + P_{SUR} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot P_{RNP} = \frac{1}{4} \cdot P_{RNP}.$$

W podobny sposób pokazujemy, że

$$P_{RQT} = \frac{1}{4} \cdot P_{RNQ}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} P_{F_2} &= P_{PRS} + P_{RQT} = \frac{1}{4} \cdot (P_{RNP} + P_{RNQ}) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot P_{PQR} = \frac{1}{4} \cdot P_{F_1}. \end{aligned}$$

Podobne rozumowanie pokazuje, że

$$P_{F_3} = \frac{1}{4} \cdot P_{F_2} = \frac{1}{16} \cdot P_{F_1},$$

$$P_{F_4} = \frac{1}{4} \cdot P_{F_3} = \frac{1}{64} \cdot P_{F_1},$$

$$P_{F_5} = \frac{1}{4} \cdot P_{F_4} = \frac{1}{256} \cdot P_{F_1}$$

i tak dalej. Pola figur  $F_1, F_2, F_3, \dots$  zostały zatem obliczone. Pozostaje tylko dodanie tych pól.

Musimy zatem obliczyć sumę

$$\begin{aligned} P_{F_1} + P_{F_2} + P_{F_3} + \dots &= P_{F_1} + \frac{1}{4} \cdot P_{F_1} + \frac{1}{16} \cdot P_{F_1} + \dots = \\ &= \frac{4}{3} \cdot P_{F_1} = \frac{4}{3} \cdot P_{PQR}. \end{aligned}$$

Druga równość wynika ze wzoru

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{4}{3}$$

znanego Archimedesowi. W ten sposób pole odcinka paraboli zostało obliczone.

## 14. Bibliografia

- [1] Cockshot, A., Walters, F. B. *A Treatise on Geometrical Conics*, Macmillan and Co, London 1907, tekst znajduje się na stronie internetowej <http://ia341016.us.archive.org/3/items/treatiseongeomet00cockrich/treatiseongeomet00cockrich.pdf>
- [2] Heath, T. L., *The Works of Archimedes*, C. J. Clay and Sons, London 1897; tekst znajduje się na stronie internetowej [www.archive.org/download/worksofarchimede029517mbp/worksofarchimede029517mbp.pdf](http://www.archive.org/download/worksofarchimede029517mbp/worksofarchimede029517mbp.pdf)
- [3] Kordos, M. *Wykłady z historii matematyki*, wyd. nowe, Script, Warszawa 2005
- [4] Netz, R., Noel, W., *Kodeks Archimedes*, Magnum, Warszawa 2007