

Matematyka kosmologiczna

Od najdawniejszych czasów ludzie pragnęli poznać, jak zbudowany jest otaczający ich świat. Jak to jest, że niebo wraz z gwiazdami obraca się oraz, że istnieją obiekty, które po niebie wędrują jakby niezależnie od ruchu obrotowego sfery niebieskiej. Wraz z rozwojem nowych technik obserwacyjnych, gdy udało się głębiej zaglądnąć w niebo, pojawiała się coraz więcej pytań o budowę i pochodzenie Wszechświata. Zauważono, że istnieją inne wyspy gwiazdne – galaktyki, które także łączą się w struktury jeszcze wyższego rzędu. Zaczęto się zastanawiać, jaka jest natura Wszechświata, jak jest zbudowany, a także jak doszło do jego powstania. Gdy w 1915 roku Albert Einstein przedstawił ogólną teorię względności, stworzone zostały nowe teoretyczne podstawy do opisu Wszechświata jako całości. Skorzystał z nich sam Einstein i dwa lata później zaproponował model Wszechświata, co dało początek nowoczesnej kosmologii. Niebawem okazało się, że z równań pola można wyprowadzić inne modele Wszechświata, czasem bardzo dziwaczne. Który z nich jest prawdziwy i opisuje rzeczywistość? Konieczne stały się dalsze badania obserwacyjne i teoretyczne. Odkryto promieniowanie tła potwierdzające hipotezę Wielkiego Wybuchu. Z równań Einsteina wyprowadzono możliwość istnienia czarnych dziur, obiektów o bardzo osobliwym charakterze. Obraz Wszechświata stawał się coraz bardziej skomplikowany i wymagał coraz bardziej subtelnych narzędzi matematycznych.

Powstanie ogólnej teorii względności było możliwe dzięki zastosowaniu metod geometrii różniczkowej i przyczyniło się do ogromnego rozwoju tych metod. Rozmaitości riemannowskie i ich uogólnienia, rozmaitości pseudoriemannowskie, stały się podstawą teorii fizycznych próbujących opisać Wszechświat. Chcący studiować teoretyczne podstawy kosmologii musieli się zapoznać właśnie z metodami geometrii pseudoriemannowskiej i innymi technikami globalnej geometrii różniczkowej. Polski czytelnik zainteresowany kosmologią zmuszony był do korzystania z literatury obcojęzycznej. Pojawiły się co prawda w języku polskim podręczniki rachunku tensorowego (np. *Rachunek tensorowy* Gołąba czy tłumaczenie o tym samym tytule książki Raszewskiego) oraz nowoczesne podręczniki geometrii różniczkowej napisane w języku rozmaitości i wiązek (np. *Geometria różniczkowa* Gancarzewicza), jednak nie było w nich mowy o zastosowaniach w fizyce, a tym bardziej w kosmologii.

Dopiero na przełomie lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych XX wieku ukazały się po polsku dwie książki wystarczająco opisujące zastosowanie matematycznych narzędzi we współczesnej kosmologii. Autorem obu jest Michał Heller znany filozof, teolog, popularyzator, ale również znany w świecie naukowym kosmolog. Miłośnicy twórczości Hellera mogą być zaskoczeni tematyką, gdyż Autor zasłynął głównie z licznych książek o charakterze filozoficznym; wiadomo, że pisze o kosmologii i fizyce, lecz raczej w kontekście filozofii i teologii, a nie za pomocą zaawansowanego języka matematyki. Nazwisko Michała Hellera stało się głośne szczególnie ostatnio, gdy siódmego maja 2008 roku wręczono mu niezwykle prestiżową nagrodę Templetona przyznaną za budowanie pomostów pomiędzy nauką i religią. Nagroda Templetona porównywana bywa często do nagrody Nobla i jest bardzo ceniona, choć u nas do czasu wręczenia Hellerowi praktycznie była nieznana. Niemal każda gazeta, codzienna lub tygodnik, za punkt honoru uznała przeprowadzenie wywiadu z laureatem. Przeważnie interesowano się jego poglądami – jakie są relacje pomiędzy współczesną nauką i religią. Rzadziej natomiast pytano o samą kosmologię i nowe koncepcje na temat budowy Wszechświata. Przypominano rozmaite książki Hellera, nie wspominano niemal wcale o jego pracach i książkach z zakresu kosmologii. Tylko nieliczne grono specjalistów wie, że Michał Heller zajmuje się konkretnymi problemami wymagającymi zastosowania zaawansowanych metod matematycznych. Zdziwić się więc może czytelnik, który sięgnie po książkę *Teoretyczne podstawy kosmologii*, gdyż zamiast rozważań filozoficznych znajdzie w niej już na początku informacje z geometrii różniczkowej jak w zaawansowanym podręczniku tego przedmiotu.

Teoretyczne podstawy kosmologii są bowiem, jak pisze sam Autor, nie podręcznikiem, lecz czymś w rodzaju monografii, w której dyskutowane mają być założenia kosmologii relatywistycznej, a zwłaszcza założenia kryjące się

w stosowanym przez kosmologię aparacie matematycznym. Pojawiają się więc w książce pojęcia współczesnej geometrii różniczkowej i są wykorzystywane do opisu problemów, którymi zajmuje się kosmologia. Czytelnik ma rzadką okazję przyjrzenia się, jak takie pojęcia „pracują”. Podręczniki geometrii przedstawiają zagadnienia czysto matematyczne i czasem można się pogubić w gąszczu abstrakcyjnych pojęć oraz skomplikowanych twierdzeń. Co prawda Autor zaznacza, że zakłada u czytelnika przygotowanie matematyczne, lecz wszystkie niezbędne pojęcia nie tylko są wprowadzone, ale także podana jest ich interpretacja fizyczna. Książka podzielona jest na sześć rozdziałów. W pierwszych dwóch omówione są podstawy współczesnej geometrii czasoprzestrzeni, w szczególności dyskutowany jest problem istnienia struktury Lorentza na rozmaitości oraz jego konsekwencje dla kosmologii. Rozdział trzeci zawiera zwięzły zestaw informacji z teorii wiązek. Opisane są między innymi przestrzenie włókniste główne, wiązki stowarzyszone, koneksje na wiązках włóknistych oraz ich zastosowanie do teorii pól cechowania. W języku teorii wiązek w rozdziale czwartym została wyłożona ogólna teoria względności, co pokazuje z jednej strony jej specyfikę jako teorii wiązek reperów liniowych nad czasoprzestrzenią, a z drugiej upodabnia teorię grawitacji do innych teorii pól cechowania współczesnej fizyki. Naturalnie nie jest to pełny wykład ogólnej teorii względności, Autor wybrał to, co niezbędne do rozważania zagadnień kosmologicznych, które omówione są w rozdziale następnym stanowiącym punkt kulminacyjny książki. Tam właśnie pojawia się próba wyjaśnienia, co to znaczy, że kosmologia jest „globalną geometrią czasoprzestrzeni”. Czytelnik może być zaskoczony, gdyż mimo przygotowania tak skomplikowanej aparatury matematycznej Heller dyskutując zagadnienia kosmologiczne praktycznie nie wykonuje żadnych obliczeń i nie pojawiają się skomplikowane wzory. Jednak bez tego przygotowania nie można byłoby tak elegancko zaprezentować problemów kosmologii. W ostatnim rozdziale za pomocą metod globalnych opisane są najprostsze modele kosmologiczne. Wybór pada na rozwiązania Robertsona–Walkera, gdyż odznaczają się dużą symetrią i, mimo iż w pewnym sensie najprostsze, dość dobrze opisują obserwowalny Wszechświat – jest to tak zwany standardowy model kosmologiczny. Na tym w zasadzie wykład się kończy, a Czytelnik, który wgrzył się w rozumowanie, będzie miał pewien niedosyt czując, że przecież kosmologia nie ogranicza się do modelu standardowego. Są jeszcze dodatki: „Esej bibliograficzny” – znakomita syntetyczna wędrówka po literaturze właśnie dla czytelników szukających znacznie obszerniejszych informacji. Drugi, dość obszerny dodatek „Ewolucja dynamicznych teorii czasoprzestrzeni” ma za zadanie ukazanie swoistej logiki rozwoju teorii czasoprzestrzeni od fizyki Arystotelesa po ogólną teorię względności. Warto zobaczyć, jak czasoprzestrzeń Arystotelesa, Galileusza czy Newtona może być opisana za pomocą języka teorii wiązek.

Teoretyczne podstawy kosmologii czyta się bardzo dobrze. Chociaż użyty język matematyczny jest zaawansowany, to nie odczuwa się jego hermetyczności, a to dzięki wyczuciu Autora, który wie doskonale, kiedy należy zrobić odpowiedni komentarz wyjaśniający. Po niemal każdym rozdziale są „Uwagi – komentarze – uzupełnienia”, gdzie można znaleźć również refleksje o charakterze bardziej ogólnym oraz dodatkowe informacje o literaturze.

Niejako kontynuacją *Teoretycznych podstaw* jest *Osobliwy Wszechświat*. Autor przyznaje się do kontynuacji, lecz nie chce, by tę monografię traktowano jako kolejny tom. Mimo iż tytuł mógłby sugerować, że jest to książka popularna o Wszechświecie, to jednak czytelnik dostaje do ręki zaawansowaną matematycznie monografię o problemach osobliwości w modelach kosmologicznych. Co to takiego jest osobliwość czasoprzestrzeni? Jak ją opisać matematycznie i zinterpretować fizycznie? Jakie osobliwości należy uznać za istotne, wynikające z natury Wszechświata, a jakie są tylko konsekwencją niefortunny dobranego formalizmu matematycznego? To tylko wybrane pytania jakie Heller dyskutuje w *Osobliwym Wszechświecie*. Gdy rodziła się kosmologia wyobrażano sobie, że Wszechświat jest ogromnym niezmiennym jako całość obiektem, dziś powiedzielibyśmy rozmaitością wyposażoną w odpowiednią strukturę (rozmaitość Lorentza). Okazało się jednak, że z równań Einsteina można jednak wyprowadzić nieskończenie wiele modeli czasoprzestrzeni.

Wśród nich były między innymi modele rozszerzającego się Wszechświata dopuszczające osobliwość, gdy objętość Wszechświata dąży do zera a gęstość do nieskończoności, przy czasie zmierzającym „do chwili osobliwej”. Najczęściej obecnie osobliwy brzeg czasoprzestrzeni definiuje się wykorzystując pojęcie geodezyjnej (przyczynowej) niezupełności. Głównym celem książki jest udowodnienie twierdzeń o istnieniu osobliwości. Twierdzenia takie mówią, pod jakimi warunkami czasoprzestrzeń jest geodezyjnie niezupełna. Droga do celu nie jest łatwa i wymaga odpowiedniego przygotowania. Trudno docenić piękno teorii bez zagłębienia się w szczegóły techniczne, a w tym przypadku jest ich sporo. Książka podzielona jest na dziesięć rozdziałów. Najpierw dyskutowane są różne warunki przyczynowe nakładane na rozmaitości Lorentza. Terminy: relacje przyczynowe, czasowa orientowalność przestrzeni, zbiory achronologiczne, pobudzają wyobraźnię, lecz mają również ściśle określone matematyczne. Wprowadzona zostaje hierarchia warunków przyczynowych (rozdział 2). Później badane są specjalne struktury czasoprzestrzeni: deterministyczna (rozdz. 3) i konforemna (rozdz.4). Po takich przygotowaniach można już przejść do bardziej konkretnego opisu osobliwości. Analizowany jest problem brzegów czasoprzestrzeni (rozdz. 5 i 6) oraz geometria krzywych czasopodobnych i zerowych, co fizycznie odpowiada historii cząstek materialnych i fotonów (rozdz. 7 i 8). Wreszcie w rozdziale 9 są sformułowane i udowodnione twierdzenia o istnieniu osobliwości. Twierdzenia te niewiele mówią o naturze samych osobliwości. Stwierdzają jedynie, kiedy pewne krzywe w czasoprzestrzeni „urywają się”, co jest interpretowane, że historia jakiejś cząstki lub fotonu nagle się urywa albo nagle „zaczyna się dziać”. Na koniec więc podjęta zostaje próba klasyfikacji osobliwości ze względu na ich „geometryczną naturę” oraz postawione są fundamentalne pytania o początek Wszechświata i naturę czasu. Czy historia Wszechświata rozpoczęła się od osobliwości? Specjaliści coraz częściej są skłonni odpowiedzieć – tak. Jednoznacznej i kategorycznej odpowiedzi jednak nie ma. Być może pomocna w udzieleniu jej będzie kwantowa teoria grawitacji (o ile powstanie). Może efekty kwantowe złamią lub ominą warunki twierdzeń o istnieniu osobliwości, a może spowodują powstanie nowych. A może unifikacja metod kwantowych z relatywistycznymi zmieni zupełnie nasze wyobrażenia o Wszechświecie? Takimi rozważaniami kończy się książka *Osobliwy Wszechświat*.

Zaawansowany formalizm matematyczny wykładu łagodzony jest przez bardzo intuicyjne komentarze Autora. Dzięki temu czytelnik może „złapać oddech” i przekonać się, że wszystkie prezentowane konstrukcje matematyczne nie są tylko sztuką dla sztuki, mają głębokie uzasadnienie fizyczne. Należy wyraźnie zaznaczyć, że poszukujących popularnego wykładu o kosmologii i osobliwościach należy odesłać do innych książek (mogą to być również książki Michała Hellera). *Teoretyczne podstawy kosmologii* oraz *Osobliwy Wszechświat* są przeznaczone dla zainteresowanych matematycznymi podstawami kosmologii. Czytelnicy, którzy mają za sobą nowoczesny kurs geometrii różniczkowej, będą mogli sprawdzić, jak poznane pojęcia i wysoce abstrakcyjne twierdzenia są wykorzystywane przez fizyków i kosmologów. Ponadto przedstawiona jest bardzo bogata literatura, a sugestywne komentarze do niej pozwolą zainteresowanym na samodzielne śledzenie zarówno problemów omówionych dokładniej jak i tych, które zostały tylko zasygnalizowane.

Kosmologia jest dziedziną rozwijającą się w ostatnich latach niezwykle intensywnie. Jedne teorie przechodzą do historii, inne stają się modne i są studiowane przez specjalistów. Aparat matematyczny wykorzystywany przez kosmologów jest coraz bardziej skomplikowany i wymaga bardzo solidnego przygotowania. Mimo iż omawiane książki ukazały się dość dawno, bo prawie dwadzieścia lat temu, to dzięki znakomitemu wyczuciu Autora, niemal nic nie straciły na aktualności i mogą stanowić bardzo dobre przygotowanie do studiowania najnowszych teorii.

Michał Heller

Teoretyczne podstawy kosmologii, PWN Warszawa 1988

Osobliwy Wszechświat, PWN Warszawa 1991

Zdzisław POGODA