

# Paradoksalny rozkład

Joanna JASZUŃSKA, Warszawa

Tytuł XXXVII Szkoły Matematyki Poglądowej w Grzegorzewicach brzmiał *Algebraiczne mocarstwo*. Niniejszy tekst to skrót mojego odczytu, który dotyczył paradoksalnych rozkładów. Głównym jego celem było zaprezentowanie, w jaki sposób i dzięki jakim faktom algebraicznym możliwe są takie „cuda i dziwy”, jak na przykład słynny

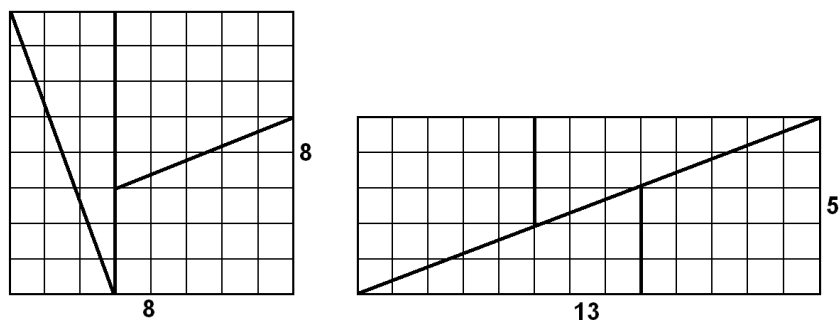
**Paradoks Banacha–Tarskiego** (1924). *Kulę można podzielić na skończenie wiele części, z których da się zbudować dwie takie same kule.*

Zacznijmy od pojęcia rozkładu figury geometrycznej.

**Rozkłady.** Najprostszym typem rozkładu na płaszczyźnie jest cięcie nożyczkami. Otrzymujemy wtedy skończenie wiele części o „przyzwoitych” kształtach (mówiąc ściślej, brzeg każdej z nich jest krzywą Jordana, czyli jest homeomorficzny z okręgiem). Co więcej, nie interesuje nas przynależność punktów z linii podziału.

Rozkłady nożyczkami pozwalają produkować paradoksy-oszustwa, polegające na pozornej zmianie pola poprzez podział i ponowne poskładanie figury. Oto przykład:

Rozcinanie nożyczkami ma szereg miłych własności, na przykład zachodzi twierdzenie Wallace-Bolyai-Gerwiena o równoważności wielokątów przez rozkład skończony. Orzeka ono, że wielokąt można tak pociąć na skończenie wiele części, aby można z nich było złożyć dany inny wielokąt o takim samym polu. Analogiczne twierdzenie w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  nie jest prawdziwe. Pytanie o to jest treścią trzeciego problemu ze słynnej listy Hilberta, a odpowiedział na nie Dehn, wprowadzając dla brył odpowiedni niezmiennik podziałów i wskazując przykład brył o jednakowej objętości, a innej wartości tego niezmiennika [1].



Jednak nie takie paradoksy i nie takie rozkłady będą przedmiotem naszych rozważań.

**Rozkładem** nazywamy dowolny podział figury na rozłączne części (niekoniecznie skończenie wiele), uwzględniający przynależność wszystkich punktów, łącznie z brzegowymi. Dopuszczamy zatem części o dowolnie dziwnych kształtach, na przykład części jednopunktowe lub niemierzalne. Jeśli figurę  $A$  możemy rozłożyć w tym sensie na części, z których następnie można złożyć figurę  $B$ , to mówimy, że  $A$  i  $B$  są **równoważne przez rozkład** i oznaczamy to  $A \sim B$ . Nietrudno sprawdzić, że rzeczywiście jest to relacja równoważności. Okazuje się, że takie podziały nie muszą zachowywać miar figur i stąd właśnie biorą się pozorne paradoksy, a dokładniej mówiąc fakty sprzeczne z naszą intuicją.

**Kwadratura koła.** Ciekawą ilustracją tego, jak różny jest taki rozkład od cięcia nożyczkami, jest zagadnienie kwadratury koła, postawione przez Tarskiego w 1925 roku. Spytał on mianowicie, czy koło można rozłożyć na skończenie wiele części tak, aby następnie złożyć z nich kwadrat o tym samym polu. Okazuje się, że tnąc nożyczkami nie można, w sensie zaś równoważności przez rozkład można (wymaga to około  $10^{50}$  części i udało się udowodnić dopiero w 1990 roku [4]).

Sformułowany na początku paradoks Banacha–Tarskiego również można przeprowadzić jedynie w sensie równoważności przez rozkład, nie zaś metodą rozcinania. Przekreśla to szanse na zastosowanie go w rzeczywistości, na przykład do pomnażania kul ze złota. Mimo to zmierzamy powoli do jego dowodu. Wiemy już, jak rozumieć słowo „rozkład”. Wyjaśnijmy teraz znaczenie drugiego z tytułowych pojęć i zobaczymy kilka prostych przykładów paradoksalnych rozkładów.

Zbiór  $E$  nazywamy **paradoksalnym**, jeśli zawiera rozłączne podzbiory  $A, B$  takie, że  $A \sim E$  oraz  $B \sim E$ , czyli, mówiąc obrazowo, jeśli z pewnych dwóch rozłącznych części zbioru możemy zbudować dwie jego pełnowartościowe kopie. Chodzi więc o takie rozkłady, które są sprzeczne z naszą intuicją dotyczącą pola lub objętości.

**Paradoksalny rozkład  $\mathbb{N}$ .** Liczby naturalne, jako podzbiór prostej, możemy podzielić na dwa rozłączne podzbiory:  $A$  — liczby parzyste oraz  $B$  — liczby nieparzyste. Następnie każdy z tych podzbiorów możemy podzielić na pojedyncze punkty i każdy punkt tak przesunąć (na przykład  $2n \mapsto n$ ), aby w rezultacie otrzymać kopię całego wyjściowego zbioru  $\mathbb{N}$ . Otrzymujemy zatem paradoksalny nieskończony rozkład  $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ . Analogicznie można pokazać, że  $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ , a nawet że  $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \dots$

**Paradoksalny rozkład okręgu.** Korzystając z powyższych obserwacji możemy rozłożyć okrąg na dwa, trzy, dowolnie wiele lub nawet przeliczalnie wiele takich samych okręgów. Skonstruujemy na początek na okręgu  $S^1$  zbiór niemierzalny Vitaliego. W tym celu wprowadzamy na punktach z okręgu następującą relację równoważności: dwa punkty są równoważne, jeśli jeden z nich można uzyskać jako obraz drugiego przy obrocie wokół środka okręgu o kąt współmierny z  $2\pi$ . Zauważmy, że każda klasa równoważności jest przeliczalna, bo tyle jest liczb wymiernych. Z aksjomatu wyboru możemy wyznaczyć zbiór  $M$  reprezentantów klas abstrakcji. Ustawmy liczby wymierne z przedziału  $[0,1]$  w ciąg  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  i liczbie naturalnej  $k$  przypiszmy obrót zbioru  $M$  wokół środka okręgu o kąt  $2\pi q_k$ . Zauważmy, że tak otrzymane przeliczalnie wiele rozłącznych obrazów zbioru  $M$  daje w sumie cały  $S^1$ . Odpowiednio dzieląc je na podzbiory i obracając, korzystając z powyższych obserwacji dotyczących paradoksalnych rozkładów zbioru  $\mathbb{N}$ , uzyskujemy analogiczne rozkłady okręgu:  $S^1 \sim S^1 \cup S^1$ ,  $S^1 \sim S^1 \cup S^1 \cup S^1$ ,  $S^1 \sim S^1 \cup S^1 \cup S^1 \cup \dots$

Zbiór  $M$  jest niemierzalny (nie ma długości), bowiem nie może mieć ani miary 0 (bo wtedy cały okrąg, jako suma zbioru  $M$  i jego obróconych kopii, również miałby długość 0), ani miary  $\varepsilon > 0$  (bo wtedy cały okrąg, jako suma nieskończenie wielu rozłącznych kopii zbioru  $M$ , miałby długość nieskończoną).

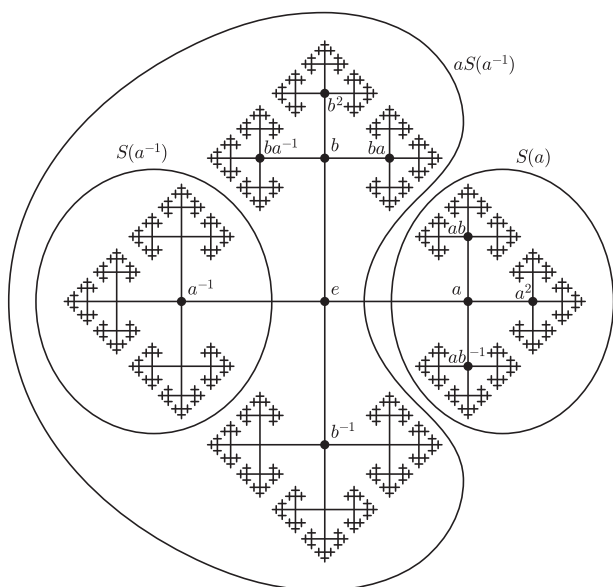
W powyższych przykładach korzystaliśmy z rozkładów nieskończonych. Od tej chwili założymy, że wszystkie rozkłady, o których mówimy, są skończone.

**Łatanie dziur.** Rozłożymy okrąg bez punktu na dwie części, zastosujemy do nich odpowiednio dobrane izometrie i w rezultacie uzyskamy cały okrąg. Niech  $T$  będzie brakującym punktem okręgu, zaś  $\varphi$  niech będzie obrotem wokół środka o ustalony kąt niewspółmierny z  $2\pi$ . Wówczas ciąg  $\varphi(T), \varphi^2(T), \varphi^3(T), \dots \in S^1$  jest nieskończony i są to różne punkty. Niech to będzie pierwszy z naszych dwóch zbiorów, zaś pozostała część okręgu niech będzie drugim. Zauważmy, że obrót w przeciwną stronę o ten sam kąt, czyli  $\varphi^{-1}$ , przeprowadza powyższy ciąg na ciąg  $T, \varphi(T), \varphi^2(T), \dots$ , a więc pozwala załatać dziurkę. Pozostała część okręgu jest nieruchoma. Stąd  $S^1 \sim S^1 \setminus \{T\}$ .

Zarówno przy definicji rozkładu, jak i zbioru paradoksalnego, zakładamy, że mamy ustaloną grupę  $G$  dozwolonych operacji na zbiorach (na przykład grupę wszystkich izometrii). Mówimy, że **grupa  $G$  działa na zbiorze  $X$** , jeśli dla dowolnych  $g \in G, x \in X$  mamy zdefiniowane działanie  $g(x) \in X$ , spełniające warunki  $g_2(g_1(x)) = (g_2g_1)(x)$  oraz  $id(x) = x$ . Na przykład grupa  $G_3$  izometrii przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  działa na zbiorze  $X = \mathbb{R}^3$ , bo dla elementu  $g \in G_3$  oraz punktu  $x \in \mathbb{R}^3$  możemy zdefiniować  $g(x)$  jako obraz punktu  $x$  przy izometrii  $g$ . *Orbita* elementu  $x$  to zbiór  $\{g(x) : g \in G\}$ .

**Grupa wolna  $F_2$**  o dwóch generatorach  $a$  i  $b$  to zbiór słów (czyli skończonych ciągów znaków) o alfabecie  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ , zredukowanych (bez fragmentów postaci  $xx^{-1}$ ), z elementem neutralnym  $e$  (słowo puste), bez relacji (dwa słowa o różnym zapisie są różne) i z działaniem konkatencji (dopisywania). Zauważmy, że ponieważ rozpatrujemy tylko słowa skończone, grupa  $F_2$  ma przeliczalnie wiele elementów. Rysuje się je często jako wierzchołki grafu. Taki graf nie ma cykli, ponieważ w grupie wolnej nie ma relacji.

Niech  $S(x)$  oznacza zbiór słów zaczynających się literą  $x$ . Zauważmy, że  $F_2$  jest rozłączną sumą  $\{e\} \cup S(a) \cup S(b) \cup S(a^{-1}) \cup S(b^{-1})$ . Jednocześnie  $F_2 = S(a) \cup aS(a^{-1})$  oraz  $F_2 = S(b) \cup bS(b^{-1})$ . Grupa wolna  $F_2$  jest zatem paradoksalna (dopisanie słowa na początku drugiego słowa to działanie grupy  $F_2$  na zbiorze swoich elementów).



**Wolna podgrupa w  $G_3$ .** Grupa  $F_2$  nie jest, wbrew pozorom, tworem czysto abstrakcyjnym. Okazuje się, że jest na przykład podgrupą grupy izometrii zwykłej przestrzeni trójwymiarowej. Konkretnie, niech  $\alpha$  będzie kątem dwuściennym czworościanu foremego, czyli  $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ . Niech  $a$  oraz  $b$  będą obrotami  $\mathbb{R}^3$  o kąt  $\alpha$ , przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, odpowiednio wokół osi  $x$  oraz  $z$ , czyli

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Można sprawdzić, że takie  $a$  i  $b$  generują grupę wolną  $F_2$  [5, str. 16].

**Od grupy do zbioru.** Dotychczas zajmowaliśmy się grupami paradoksalnymi, umiemy wykazać, że  $F_2$  jest paradoksalna i umiemy wskazać podgrupę  $G_3$  izomorficzną z  $F_2$ . Docelowo chcielibyśmy jednak skonstruować nie grupę, a zbiór paradoksalny. Przyda nam się do tego następujące

**Stwierdzenie.** *Jeśli grupa paradoksalna  $G$  działa, bez nietrywialnych punktów stałych, na pewnym zbiorze, to ten zbiór jest paradoksalny.*

Jeśli zauważymy, że dany zbiór rozpada się na orbity przy działaniu elementów grupy  $G$  i wybierzemy zbiór  $M$  reprezentantów tych orbit, to dowód stwierdzenia przebiega bardzo podobnie do przedstawionego wcześniej paradoksalnego rozkładu okręgu. Okazuje się zatem, że paradoksalny rozkład grupy „przenosi się” na paradoksalny rozkład zbioru. Powyższe stwierdzenie jest prawdziwe w szczególności dla naszej  $F_2 \subseteq G_3$ . To pozwala udowodnić

**Paradoks Hausdorffa.** *Istnieje taki przeliczalny podzbiór  $D$  sfery  $S^2$ , że zbiór  $S^2 \setminus D$  jest paradoksalny.*

Dla dowodu zauważmy, że osie wszystkich obrotów z naszej grupy  $F_2 \subseteq G_3$  przechodzą przez środek układu współrzędnych. Niech  $D$  oznacza zbiór punktów, w których te osie przebijają sferę  $S^2$ . Nietrudno sprawdzić, że  $F_2$  działa na  $S^2 \setminus D$  bez nietrywialnych punktów stałych. Wobec tego spełnione są założenia powyższego stwierdzenia, zatem zbiór  $S^2 \setminus D$  jest paradoksalny.

**Łatanie dziur w sferze.** Ponieważ grupa  $F_2$  jest przeliczalna, a każda oś obrotu przebija sferę w 2 punktach, zbiór  $D$  również jest przeliczalny. Stosując tę samą metodę łatania dziur, która posłużyła do dowodu, że  $S^1 \setminus \{T\} \sim S^1$ , można wykazać, że  $S^2 \setminus D \sim S^2$ .

**Paradoks Banacha–Tarskiego.** Wiemy już, że dla odpowiednio dobranego zbioru  $D$ , zbiór  $S^2 \setminus D$  jest paradoksalny oraz że  $S^2 \setminus D \sim S^2$ . Ponieważ zbiór równoważny ze zbiorem paradoksalnym też jest paradoksalny, uzyskujemy paradoks Banacha–Tarskiego dla  $S^2$ : **sfera jest paradoksalna.**

Zauważmy, że kula bez środka to „cebulka” złożona ze sfer współśrodkowych. Skoro każda z nich jest paradoksalna, to kula bez środka również jest paradoksalna (bo punkty każdego promienia możemy skleić i przemieszczać wspólnie). Weźmy teraz dowolny okrąg przechodzący przez środek kuli  $T$  i całkowicie w niej zawarty. Wiemy, że  $S^1 \sim S^1 \setminus \{T\}$ , zatem umiemy załatać dziurkę, czyli kula bez środka jest równoważna całej kuli. Stąd paradoks Banacha–Tarskiego: **kula jest paradoksalna.**

**Podwojenie objętości?** Z paradoksu Banacha–Tarskiego płynie morał, że w  $\mathbb{R}^3$  nie istnieje miara uniwersalna (czyli określona na *wszystkich* podzbiorach), skończenie addytywna, niezmiennicza ze względu na izometrie i przyjmująca wartość 1 na kostce jednostkowej. Gdyby bowiem istniała, niemożliwe byłoby podwojenie kuli. Inaczej jest dla  $\mathbb{R}^2$  — zachodzi **twierdzenie Banacha**, które mówi, że na płaszczyźnie istnieje analogiczna miara (rozszerzająca naszą naturalną miarę Jordana). Wobec tego w  $\mathbb{R}^2$  nie ma szans na żaden „miarowy” paradoksalny rozkład.

**Prosta i płaszczyzna.** O tym, że w  $\mathbb{R}^1$  ani w  $\mathbb{R}^2$  nie istnieją paradoksy analogiczne do rozkładu kuli Banacha–Tarskiego, nietrudno się przekonać

**Uwagi.** W powyższym dowodzie pokazaliśmy, że kula zawiera dwa rozłączne podzbiory, z których z każdego można zbudować nową kulę. Można ten dowód zmodyfikować tak, by te dwa początkowe podzbiory w sumie dawały całą wyjściową kulę (czyli by rzeczywiście mieć rozkład kuli). Można również ograniczyć liczbę wszystkich części, na które trzeba poszatkować wyjściową kulę, do pięciu. Dodatkowo, dołączając do naszej kuli rodzinę coraz większych sfer współśrodkowych z nią, uzyskujemy wniosek, że **przestrzeń  $\mathbb{R}^3$  jest paradoksalna**. Ponadto znane jest następujące

**Uogólnienie [5, tw. 3.11].** *Dla dowolnych ograniczonych podzbiorów  $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$  o niepustym wnętrzu zachodzi  $A \sim B$ .*

sprawdzając, że  $F_2$  nie jest podgrupą grupy  $G_1$  izometrii prostej ani grupy  $G_2$  izometrii płaszczyzny. Przyjrzyjmy się dokładniej, dlaczego tak jest.

Izometrie prostej to przesunięcia i symetrie względem punktu. Wobec tego kwadrat każdej izometrii jest przesunięciem, zaś przesunięcia są przemienne. Stąd dla dowolnych dwóch izometrii  $x, y$  zachodzi relacja  $x^2y^2x^{-2}y^{-2} = id$ , czyli w  $G_1$  nie ma podgrupy wolnej rzędu 2.

Na płaszczyźnie każda izometria jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych (twierdzenie Chaslesa). Wynika z tego, że elementy  $G_2$  to przesunięcia, obroty i symetrie z poślizgiem (czyli symetrie złożone z przesunięciem równoległym do osi). Kwadrat każdej izometrii jest izometrią parzystą, a więc przesunięciem lub obrotem. Wobec tego dla dowolnych dwóch izometrii  $x, y$ , złożenia  $x^2y^2x^{-2}y^{-2}$  oraz  $x^2y^{-2}x^{-2}y^2$  są przesunięciami (bo kąty ewentualnych obrotów się redukują). Przesunięcia są przemienne, zatem

$$(x^2y^2x^{-2}y^{-2})(x^2y^{-2}x^{-2}y^2)(x^2y^2x^{-2}y^{-2})^{-1}(x^2y^{-2}x^{-2}y^2)^{-1} = id,$$

co po uproszczeniu daje relację

$$x^2y^2x^{-2}y^{-2}x^2y^{-2}x^{-2}y^4x^2y^{-2}x^{-2}y^{-2}x^2y^2x^{-2} = id,$$

czyli w  $G_2$  także nie ma podgrupy wolnej rzędu 2.

Narzucają się pytania, jak takie relacje wymyślać i czy nie ma krótszych. Odpowiedzi znów dostarcza „algebraiczne mocarstwo”, a konkretniej takie pojęcia, jak komutator dwóch elementów, rozwiązalność grup oraz twierdzenie, że grupy  $G_1$  i  $G_2$  są rozwiązalne. Ale to już jest temat na osobną opowieść.

#### Literatura

- [1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002
- [2] Wojciech Guzicki, Piotr Zakrzewski, *Paradoksalny rozkład kuli*, Delta nr 5 (161) 1987
- [3] Marek Kordos, *Zwykłe izometrie zwykłej płaszczyzny*, Delta nr 12 (180) 1988
- [4] Miklos Laczkovich, *Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski's circle squaring problem*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 404 (1990) str. 77-117
- [5] Stan Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985
- [6] Leonard M. Wapner, *The Pea and the Sun*, A. K. Peters, 2005

Wskazówka do wyjaśnienia oszustwa ze strony 38:  $64 = 65$ , bo  $\frac{2}{5} = \frac{3}{8}$ .