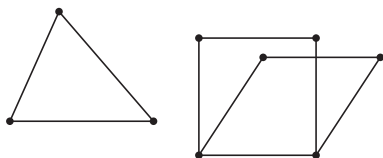


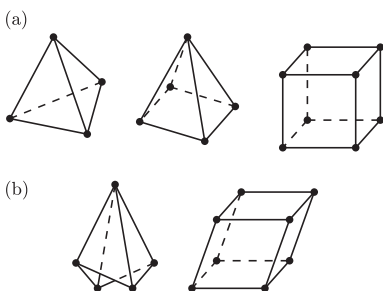
Ruchome wielościany

Jerzy BEDNARCZUK, Marek KORDOS,

Witold SADOWSKI, Warszawa



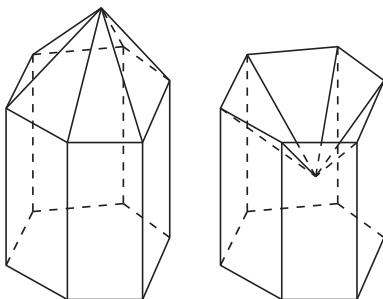
Rys. 1



Rys. 2

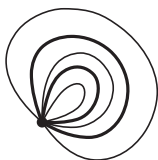
Wyobraźmy sobie, że boki trójkąta to zapalki połączone w wierzchołkach gumową zlepką. Takim trójkątem ruszyć się nie da, chyba że coś w nim połamiemy. Gdybyśmy podobnie zbudowali kwadrat, to z łatwością wyginałoby go do rombu o różnych kątach rozwarcia. Powiemy zatem, że trójkąt jest sztywny, a kwadrat się rusza (rys. 1). A jak to jest z wielościanami? Wykonajmy model czworościanu foremego, piramidy i kostki (sześcianu) złożony z samych zapalek-krawędzi i gumowych wierzchołków (rys. 2a). Łatwo zauważymy, że czworościanem ruszyć się nie da, natomiast piramida i sześciąt wyginają się na wiele sposobów (rys. 2b). Nasuwa się podejrzenie, że gdy wielościan ma tylko ściany trójkątne, to jego modelem krawędziowym (złożonym z samych gumowych wierzchołków i usztywnionych krawędzi) ruszyć się nie da, a gdy ma też ściany będące innymi wielokątami, to staje się ruchomy. Czy tak jest w istocie? Chociaż pytanie wydaje się bardzo proste, odpowiedź na nie przyszła jednak bardzo późno. Dopiero w roku 1981 Roth wykazał, że model krawędziowy wypukłego wielościanu jest sztywny wtedy i tylko wtedy, gdy wielościan ma wszystkie ściany trójkątne. Jak widać, Roth wypowiedział swe twierdzenie tylko dla wielościanów wypukłych. Czy nie mógł więc udowodnić ogólniejszego twierdzenia dotyczącego dowolnych wielościanów?

Hipoteza Eulera. Zanim odpowiemy na to pytanie, zauważmy, że bardziej naturalny problem związany ze sztywnością wielościanów dotyczy sytuacji, gdy zamiast modeli krawędziowych rozważamy modele ze sztywnymi ścianami, tzn. takie modele, w których ściany są na przykład metalowe, a krawędzie zachowują się jak zawiasy. W tej sytuacji sześciąt i piramida staną się natychmiast sztywne i do ich zdeformowania potrzeba nie tyle inteligencji, co dużej siły... Już w roku 1766 Leonard Euler, postawił hipotezę, że każdy wielościan jest sztywny. Wydawało się, że to raczej oczywiste stwierdzenie, ale dopiero pół wieku później Augustyn Cauchy wykazał, że na pewno jest to prawdą dla wielościanów wypukłych. Dowód Cauchy'ego jest bardzo pomysłowy. Przedstawimy krótko jego najważniejsze punkty.

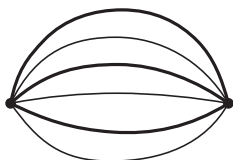


Rys. 3

Wykażemy mianowicie, że dwa wielościany wypukłe A oraz B o przystających ścianach i wzajemnie sobie odpowiadających wierzchołkach oraz krawędziach muszą być przystające. Stąd bezpośrednio wynika, że nie można płynnym ruchem przekształcić jednego wypukłego wielościanu na inny, poruszając tylko jego zawiasowymi kątami dwuściennymi i nie zmieniając jego ścian. (Zauważmy jednak, że dla dowolnych wielościanów teza o przystawaniu nie jest prawdziwa – patrz rys. 3). Dowód przeprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy zatem, że mamy dwa nieprzystające wielościany wypukłe A i B , których ściany są przystające. Oczywiście wielościany te muszą się wówczas różnić pewnymi kątami dwuściennymi. Pomalujmy więc na zielono te kąty wielościanu B , które są bardziej rozwarte niż odpowiadające im kąty w wielościanie A , a na czerwono te, które są mniej rozwarte. Wykażemy, że wówczas kolorowe kąty dwuścienne przy pewnym wierzchołku dzielą się na dwie grupy: serię kolejnych czerwonych kątów i serię kolejnych zielonych kątów. Aby wykazać, że jest tak w istocie, rozciągnijmy mocno jedną ze ścian i zrzućmy narysowany w przestrzeni zielono-czerwony graf na płaszczyznę tej ściany. Chcemy wykazać, że przy pewnym wierzchołku zmiana barwy wychodzących z niego krawędzi dokonuje się tylko dwa razy. Wynika to natychmiast z następującego lematu o grafach dwukolorowych.



Rys. 4



Rys. 5

Lemat o grafach dwukolorowych. W spójnym grafie na płaszczyźnie, którego krawędzie pomalowano dwoma kolorami i który nie zawiera pętelek (rys. 4) ani krawędzi wielokrotnych (rys. 5) istnieje przynajmniej jeden wierzchołek, wokół którego zmiana barwy dokonuje się tylko dwa razy.

Dowód lematu. Nie wprost. Niech graf ma k krawędzi, s ścian i w wierzchołków. Niech ponadto s_n będzie liczbą ścian n -kątnych. Gdyby w każdym wierzchołku zmiana barwy

dokonywała się więcej niż dwa razy, to znaczyłoby, że wszystkich zmian byłoby nie mniej niż $4w$ (wokół wierzchołka barwa może się zmienić tylko parzystą liczbę razy). Z drugiej strony zliczając zmianę barwy po każdej ścianie z osobna (rys. 6), widzimy, że wszystkich zmian barwy jest nie więcej

$$2s_3 + 4s_4 + 4s_5 + 6s_6 + 6s_7 + \dots$$

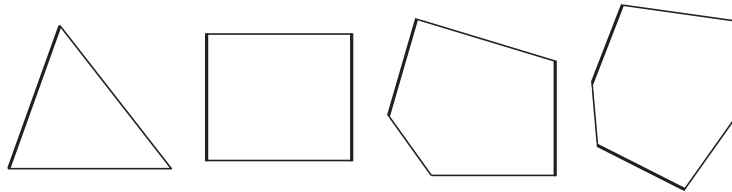
Łącząc te dwa wyniki mamy

$$4w \leq 2s_3 + 4s_4 + 4s_5 + 6s_6 + 6s_7 + \dots,$$

co po podstawieniu – ze wzoru Eulera:

$$4w = 4k - 4s + 8 = 2(3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots) - 4(s_3 + s_4 + s_5 + \dots) + 8$$

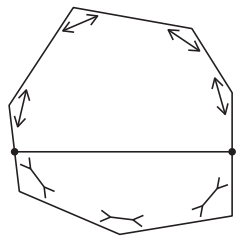
łatwo prowadzi do sprzeczności.



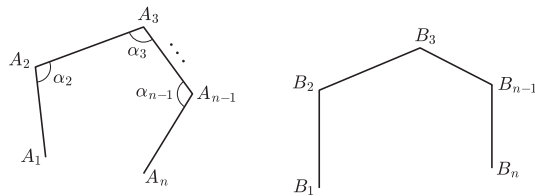
Rys. 6

Dalej dowód twierdzenia przebiega już prosto: bierzemy wierzchołek wielościanu B , w którym zmiana barwy następuje dwukrotnie, otaczamy go małą kulką i bierzemy jej przecięcie z powierzchnią wielościanu. W otrzymanym wielokącie (co prawda sferycznym, ale łatwo go zamienić na „zwykły”) mamy serię „ściśniętych” kątów i następującą po niej serię „rozszerzonych kątów”.

A zatem – to jest nasz paradoksalny wniosek kończący dowód nie wprost – linia podziału pomiędzy obiema seriami (rys. 7) jednocześnie musi być krótsza i dłuższa od analogicznej linii uzyskanej z przecięcia takiej samej kulki z odpowiednim wierzchołkiem wielościanu A . Wynika to bowiem z następującego lematu Cauchy’ego o ramieniu.



Rys. 7



Rys. 8

Lemat Cauchy’ego o ramieniu. Niech dane będą dwa wielokąty wypukłe $A_1A_2 \dots A_n$ oraz $B_1B_2 \dots B_n$ o kątach przy wierzchołkach odpowiednio $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ i $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Niech ponadto

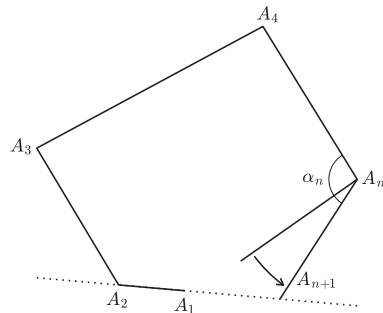
$$A_k A_{k+1} = B_k B_{k+1}$$

dla $k = 1, 2, n-1$ oraz

$$\alpha_k \leq \beta_k$$

dla $k = 2, 3, \dots, n-1$. Wtedy $A_1 A_n \leq B_1 B_n$ (rys. 8).

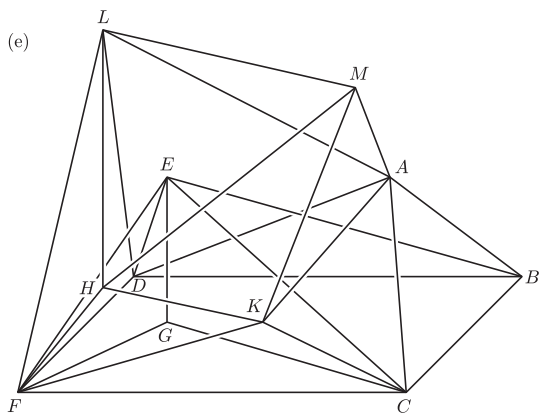
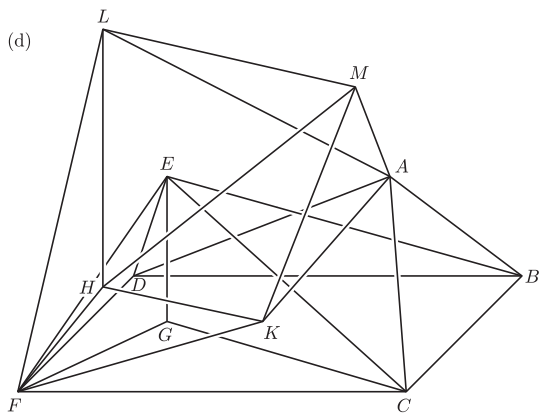
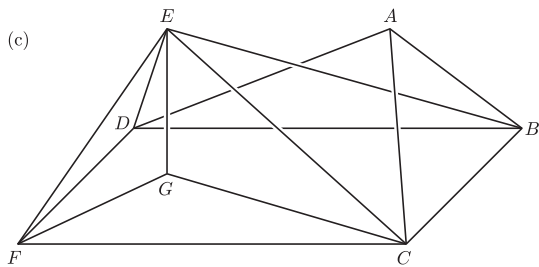
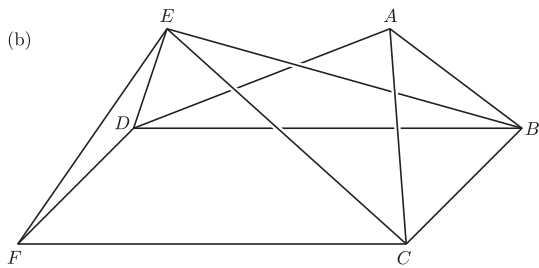
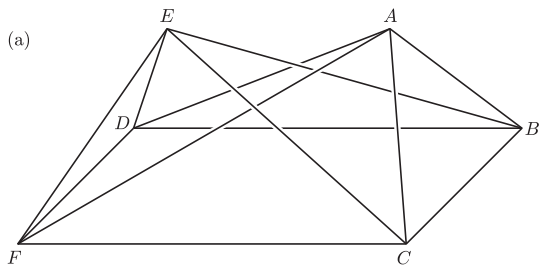
Dowód. Przez indukcję. Dla $n = 3$ lemat jest oczywisty. Załóżmy więc, że teza zachodzi dla pewnego n i rozważmy odpowiednie wielokąty $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ oraz $B_1B_2 \dots B_{n+1}$. Jeżeli dla pewnego $2 \leq k \leq n$ zachodzi równość $\alpha_k = \beta_k$, to odcinając trójkąty $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ i $B_{k-1}B_kB_{k+1}$ otrzymamy tezę z założenia indukcyjnego. Jeśli jednak wszystkie nierówności między kątami są ostre, to rozszerzamy kąt α_n tak, by stał się równy kątowi β_n . Jeżeli to się udaje przy zachowaniu wypukłości wielokąta $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, to odcinamy trójkąty $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ oraz $B_{n-1}B_nB_{n+1}$ i znów mamy tezę. Jeśli natomiast nie da się rozszerzyć kąta α_n tak, by zachować wypukłość wielokąta $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, to rozszerzanie kąta α_n przerywamy w sytuacji z rys. 9 i korzystając z nierówności i założenia indukcyjnego znów łatwo uzyskamy tezę.



Rys. 9

Z przedstawionego dowodu wynika, iż wypukły wielościan ruchomy istnieć nie może. Problem z dowodem Cauchy’ego polega jednak właśnie na tym, że mówi on jedynie o wielościanach wypukłych. Dlaczego nie daje się uogólnić na dowolne wielościany? Dlatego, że dowód jest niedoskonały, czy dlatego, że... istnieją ruchome wielościany?

Ośmiościan Bricarda. Po zaprezentowaniu dowodu Cauchy’ego w roku 1813 przez następne lata nie dzieje się właściwie nic godnego uwagi i dopiero pod koniec XIX wieku Bricard zauważa, że jeśli jakiś ośmiościan miałby się poruszać, to musiałby mieć samoprzecięcia. Na tej uwadze zresztą nie poprzestaje i buduje takie samoprzecinające się modele. Łatwo to za nim powtórzyć i zbudować model krawędziowy przedstawiony na rysunku 10a. Figura taka porusza się w ten sposób, że wierzchołki B i F można zginać do dołu, pozostawiając w jednej płaszczyźnie wierzchołki C i D .



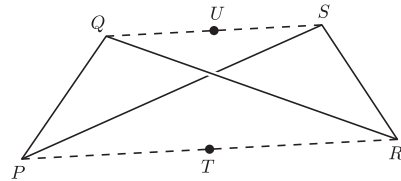
Rys. 10. Od „ośmiościanu” Bricarda ($BCFD$ jest prostokątem, ABC i DEF to trójkąty równoboczne, $AD = AF = EB = EC$) do flexora Connelliego.

Oczywiście, wszystkie jego „ściany” są sztywne, bo trójkątne, lecz nie można ich równocześnie okryć tekturką – ściany ADF i BCE przenikają się. Ale nawet gdyby było można, to i tak otrzymana figura nie byłaby wielościanem (bo suma wszystkich trójkątów nie rozcinałaby przestrzeni).

Flexor Connelliego. W 1978 roku Robert Connolly znalazł jednak obejście tych trudności – w przenośni i dosłownie. Po usunięciu krawędzi AF (rys. 10b) ścian trójkątnych pozostaje sześć, ale wszystkie tym razem dają się pokryć tekturką. Co więcej, otrzymana figura nie rusza się ani mniej, ani bardziej od „ośmiościanu” Bricarda. Aby się o tym przekonać, udowodnimy

Lemat o przestrzennym czworokącie. *Łamana zamknięta $PQRS$ spełnia warunki $PQ = RS$ i $PS = QR$. Wówczas, jeśli środki T i U odcinków PR i QS są różne, prosta TU jest prostopadła do obu tych odcinków.*

Dowód lematu. Trójkąty PTU i RTU (rys. 11) są przystające ($PT = RT$ z założenia, TU wspólne, PU i RU to środkowe w przystających trójkątach PQS i RSQ). Wobec tego $TU \perp PR$. Drugiej prostopadłości dowodzimy analogicznie.



Rys. 11. Odcinki PR i TU na ogół nie są równoległe, jeden biegnie przed, a drugi za kartkę.

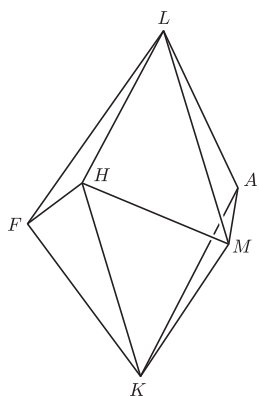
Z lematu wynika, że łamana zamknięta $BCFD$ ma w każdym położeniu oś symetrii – prostą łączącą środki BF i CD . Ponieważ punkt A jest połączony z B , C i D krawędziami o takich samych długościach jak krawędzie łączące E z F , D i C , więc punkty A i E są symetryczne względem tej samej osi. Stąd wynika, że stale $AF = EB$, choć krawędzi już nie ma.

Widać stąd, że moglibyśmy bez zmian w ruchomości figury usunąć jeszcze krawędź EB , ale tego nie zrobimy. Przykrywamy tekturkami wszystkie trójkąty z rysunku 10b i staramy się jakoś uzupełnić otrzymaną figurę do – nadal ruchomego – wielościanu.

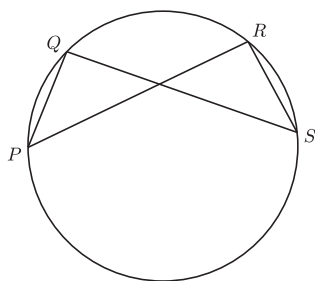
Istotnym elementem tego uzupełnienia będzie figura widoczna na rysunku 12. Ponieważ wszystkie odcinki wychodzące z K i z L są równe, więc łamana $AMHF$ leży na sferze o środku K i na sferze o środku L , a więc jest płaska i leży na okręgu (bo tak przecież przecinają się sfery). Ponadto z $AM = FH$ wynika $AF = MH$, co wyraża

Lemat o cięciwach. *Jeśli czworokąt wpisany w okrąg ma parę przeciwległych boków równych, to ma równe przekątne.*

Dowód lematu. Przyjmijmy oznaczenia z rysunku 13 i niech $PQ = RS$. Wobec tego równe są także łuki PQR i QRS , a więc i zamykające je cięciwy.



Rys. 12. $KA = KM = KH = KF = LA = LM = LH = LF$ oraz $AM = FH$. Wszystkie trójkąty pokrywamy tekturką.

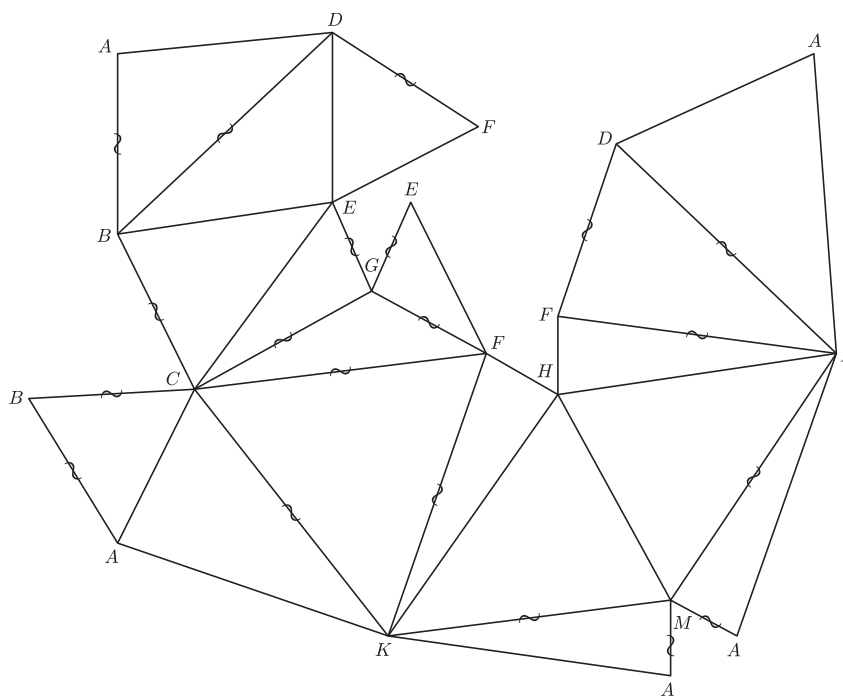


Rys. 13

Zauważmy, że figura z rysunku 12 też jest ruchoma: zbliżając i oddalając punkty K i L po prostu powiększamy lub zmniejszamy promień okręgu, w który jest wpisany czworokąt $AMFH$. Jego największy promień to pół długości MH plus długość AM , a najmniejszy to pół długości MH minus długość AM (lub zero).

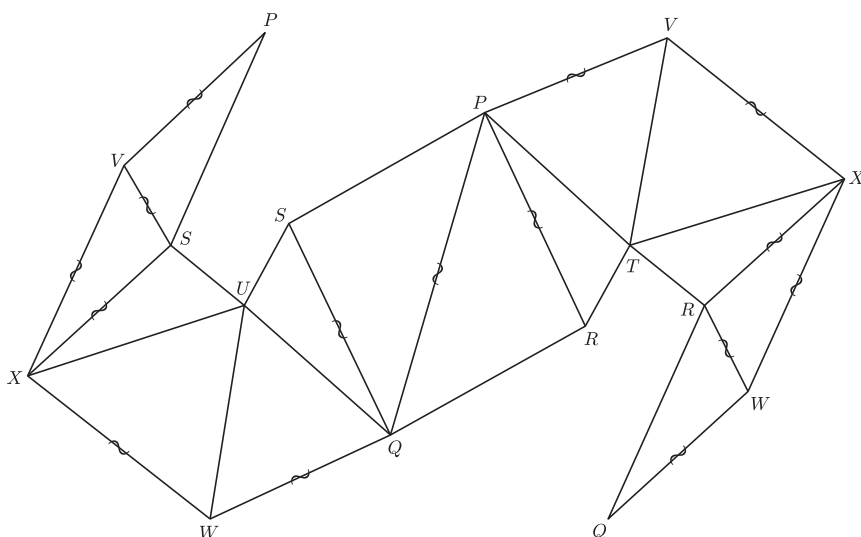
Dość dziwne nazwy punktów tej figury wskazują, że chcemy połączyć tak samo nazywające się punkty z rysunków 10b i 12. To jednak okazuje się niemożliwe, gdyż przeszkadza ścianka CEF . Zastępujemy wobec tego ją wnęką – pozostałymi trzema ścianami czworościanu $CEFG$ (rys. 10c). Teraz już można utożsamiać punkty A i punkty F z rysunków 10b i 12. Otrzymuje się ruchomą (bo połączyliśmy dwie ruchome figury tylko w dwóch punktach) figurę z rysunku 10d. Analiza (trudna!) tego rysunku wskazuje, że nie jest to wielościan, bo ma aż 8 wolnych krawędzi (AC, FC, AD, FD są wolne w figurze z rysunku 10b, AK, FK, AL, FL – w tej z rysunku 12). Z drugiej jednak strony możemy zrezygnować z tego, by obie figury ruszały się niezależnie: dołączmy (równe) krawędzie CK i DL (rys. 10e). Teraz możemy zakleić powstałe trójkąty AKC, FKC, ALD, FLD i – o dziwo – powstaje wielościan, i to ruchomy. Taki właśnie wielościan skonstruował Connelly, dowodząc tym samym, że założenie wypukłości w twierdzeniu Cauchy’ego nie da się pominąć.

Mocno powątpiewamy, czy rysunek 10e pozwoli komukolwiek na „zobaczenie” tego wielościanu. Można jednak dobrać tak długości odcinków występujących w tej konstrukcji, by dawał się on fizycznie uzyskać, np. skleić z kartonu. Dla chętnych jego siatka – zaznaczone falką krawędzie są skierowane „ostrzem” na zewnątrz, pozostałe do wewnątrz. Skleić się po kilku próbach, wartość a z opisu przyjąć w granicach 1 do 3 cm.



Rys. 14. $AK = AL = FK = FL = HK = HL = KM = LM = 15a$,
 $AB = AC = BC = DE = DF = EF = 9a$, $AD = BE = CE = HM = 12a$,
 $BD = CF = CK = DL = 16a$, $AM = FH = 4a$, $CG = 11a$, $EG = 5a$, $FG = 7a$.

Flexor Steffena. Wielościan Connellego jest pokraczny. Ma 18 ścian, 11 wierzchołków i 27 krawędzi. Krawędzie są bardzo różnych długości, ściany (choć wszystkie trójkątne) – bardzo różnych kształtów. Gdy jednak już było wiadomo, że flexory (tak nazywa się ruchome wielościany o sztywnych ścianach) istnieją, udało się zrobić coś lepszego. Klaus Steffen skonstruował lepszy przykład. Ma on 14 ścian, 9 wierzchołków i 21 krawędzi. Różnych długości krawędzi jest 5, a różnych ścian tylko 4. Wydaje się, że są to wartości nie do zmniejszenia.



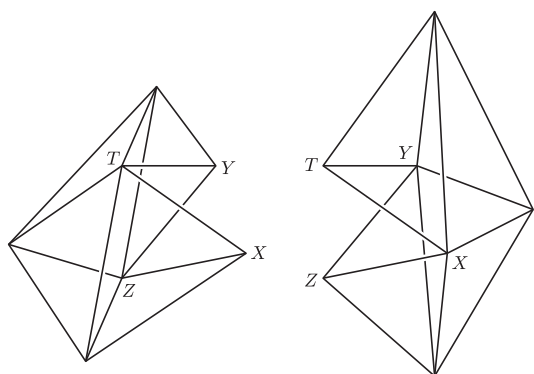
Rys. 15 $PR = QR = PS = QS = TX = UX = VX = WX = 12b$,
 $PT = QU = PV = QW = RX = SX = 10b$, $RT = SU = RW = SV = 5b$,
 $TV = UW = 11b$, $PQ = 17b$.

Co więcej, siatka flexora Steffena ma środek symetrii, a on sam – w jednym z położeń – oś symetrii (jedna z prostopadłych do odcinka PQ w jego środku).

O flexorach mało wiadomo, choć dziś wiemy np., że flexor we wszystkich swoich położeniach ma tę samą objętość.

I oszustwo. Istnieją także efektowne pseudoflexory, choć ich ruchomość jest bardzo sugestywna. Taki wielościan można skonstruować, biorąc dwa ośmiościany i rozcinając każdemu z nich dwie sąsiednie krawędzie. Potem ustawiamy je tak, by powstałe „pyszczyki” były prostopadłe (rys. 16) i łączymy w ten sposób, by „kąciki ust” jednego połączyły się ze „szczytem warg” drugiego. Uzyskany wielościan, nawet przy bardzo starannym wykonaniu, rusza się – można na przemian „zamykać ich pyszczyki” (drugi wtedy łączy „kąciki ust”). Ruch jest znaczny, ale dość łatwo można przekonać się, że powstałe w ten sposób urządzenie „oddycha”, a więc flexorem nie jest.

Ośmiościan to dwa prawidłowe ostrosłupy czworokątne złączone podstawami. Gdy podobną operację przeprowadzić z dziesięścianami, powstałymi przez połączenie podstawami dwóch prawidłowych ostrosłupów pięciokątnych, wrażenie, że otrzymaliśmy flexor, jest jeszcze silniejsze.



Rys. 16